

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

Matematično-fizikalna smer

Andrej Studen
**Električno polje v sevalno poškodovani silicijevi
 p^+nn^+ diodi**

DIPLOMSKO DELO

MENTOR: prof. dr. Marko Mikuž

Ljubljana, 2000

Izvleček

V diplomskem delu je opisano računanje električnega polja v p^+nn^+ diodi pri različnih napetostih, temperaturah in sevalnih dozah. Sevanje simuliramo z naraščajočo gostoto globokih akceptorskih nivojev 0.05 eV nad lastno energijo polprevodnika. Električno polje se dobro ujema s sliko, ki nam jo kažejo poskusi s svetlobno vzbujenimi nosilci naboja v diodi.

Ključne besede: silicijevi detektorji, globoki nivoji, električno polje v polprevodniku

Abstract

The electric field in a p^+nn^+ diode at different voltages, temperatures and levels of radiation is calculated. Radiation is simulated via an increasing density of deep acceptors 0.05 eV above the intrinsic energy of the semiconductor. Simulated electric fields agree well with the features of the field extracted from the experiments with light-induced free carriers in the diode.

Keywords: silicon detectors, deep levels, electrical field in semiconductors

PACS

- 41.20.Jb
- 72.20.-i

Kazalo

Uvod	7
1 Detektor	9
2 Polprevodniki	13
2.1 Uvod	13
2.2 Boltzmannov približek	13
2.3 Približek popolnoma osiromašenih plasti	16
2.4 Tokovi v okviru približkov	20
3 Generacija in rekombinacija, sevalne poškodbe	23
3.1 Uvod	23
3.2 Globoki nivoji	24
3.3 Povezave med koeficienti pasti	25
3.4 Generacija in rekombinacija	26
4 Reševanje sistema enačb	29
4.1 Uvod	29
4.2 Poissonova enačba	30
4.2.1 Streljanje	31
4.2.2 Relaksacija	36
4.3 Kontinuitetni enačbi	38
4.3.1 Integriranje	39
4.3.2 Relaksacija	40
4.4 Iteracija	40
5 Rezultati in meritve	41
5.1 Uvod	41
5.2 Meritev	41
5.3 Električno polje	42
5.3.1 Sprememba tipa polprevodnika	43
5.3.2 Sprememba tipa pri ohlajanju	43
5.3.3 Gostota nosilcev naboja	46
5.4 Dvojni stik	47
5.5 Temni tok	48

6 Zaključek	51
A Numerične metode	53
A.1 Streljanje	53
A.2 Relaksacija	54
B Ramov teorem	57
B.1 Ramov teorem	57
B.2 Oblika signala	59
C Temni tok	61
D Uporabljeni simboli in njihov pomen	65

Uvod

Merilne tehnike na področju eksperimentalne fizike osnovnih delcev se spreminjajo. Tako postaja uporaba silicijevih diod kot sledilcev nabitih delcev vse bolj običajna. Praksa pa vedno odpira nova področja raziskovanja.

V letu 2005 bo v CERNU v Ženevi začel delovati pospeševalnik protonov, ki bo dosegel najvišje energije trkov na svetu. Za opazovanje reakcij bodo raziskovalci pri eksperimentu ATLAS zgradili orjaški detektor dimenzij manjše stolpnice. V jedru tega detektorja, ki ga kažeta sliki 1.1 in 1.2 bo silicijev sledilec. Ta bo zaznal nabite delce, ki v siliciju ionizirajo pare elektron-vrzel. Silicijeve ploščice imajo na površini naparjene prevodne pasove, na katerih lahko z veliko prostorsko ločljivostjo zaznamo kratkotrajne sunke toka.

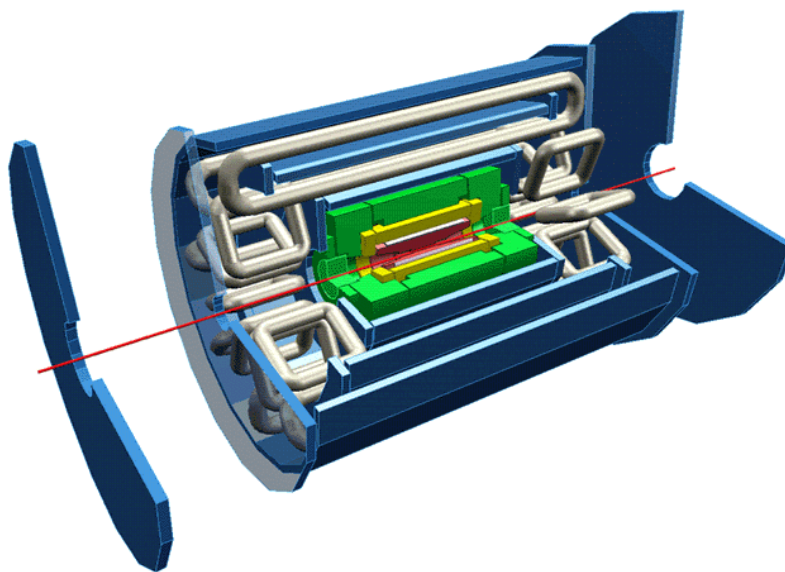
Zaradi bližine točke trka bo silicij izpostavljen znatnemu fluksu nastalih pionov in sekundarnih nevtronov. Kristalna struktura silicija bo zato s časom utrpela številne poškodbe. K sreči lahko večino poškodb vsaj kvalitativno opišemo. Tako pridobljeni podatki zadostujejo, da lahko napovemo vpliv poškodb na značilnosti silicija. Zlasti zanimivi so vplivi poškodb na električno polje, saj je le-to osnova številnim parametrom detektorjev od delovne napetosti, pričakovanega toka, do same oblike signalov. V to področje sega diplomsko delo. Njegova naloga je izpeljava oblike električnega polja s karseda malo poenostavitvami, da lahko v obliki polja prepoznamo širok spekter vplivov, od gostote sevalnih poškodb do različnih zunanjih napetosti, vrst primesi in temperatur.

V prvem delu razložimo osnove polprevodniške fizike, skupaj z največkrat uporabljanimi približki. Nadaljujemo z opazovanjem neravnovesnega polprevodnika in vplivov sevalnih poškodb. Numeričnemu reševanju diferencialnih enačb je namenjeno četrto poglavje, zadnje pa primerja rezultate meritev s posledicami izračunov v okviru predstavljenega modela.

V dodatku predstavimo uporabljene numerične metode in Ramov teorem, zvezo med obliko signala na kovinskih elektrodah in obliko polja v detektorju. Zadnji dodatek je izpeljava oblike električnega toka skozi diodo za različne zunanje napetosti.

Poglavje 1

Detektor

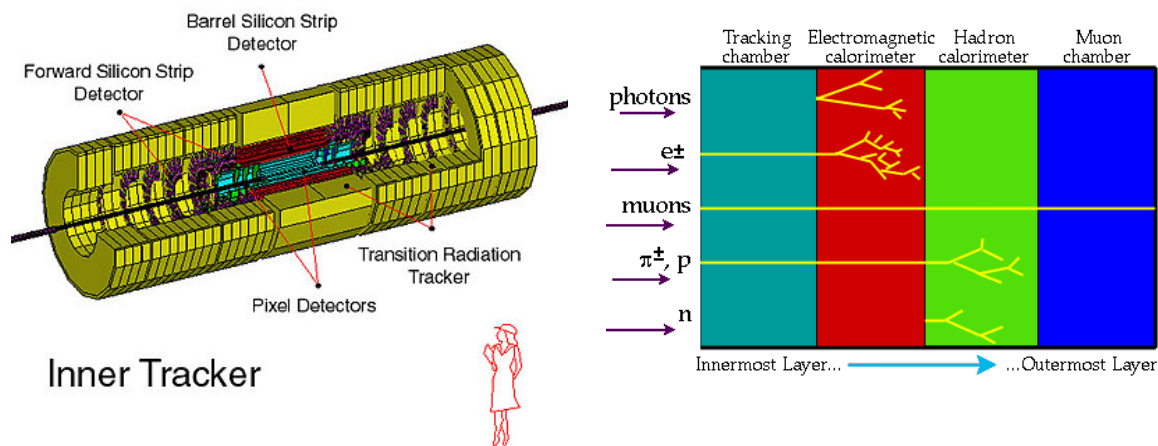


Slika 1.1: Detektor eksperimenta ATLAS. Ogromna struktura velikosti petnadstropne stolpnice bo zaznavala trke protonov v središču detektorja. Rezultate bodo odčitavali številni manjši detektorji, razporejeni v koncentričnih valjih okrog te cevi in v dveh pokrovih. Silicijeve plošče bodo vgrajene tik ob osi žarka in bodo zato najbolj izpostavljene radiaciji [1].

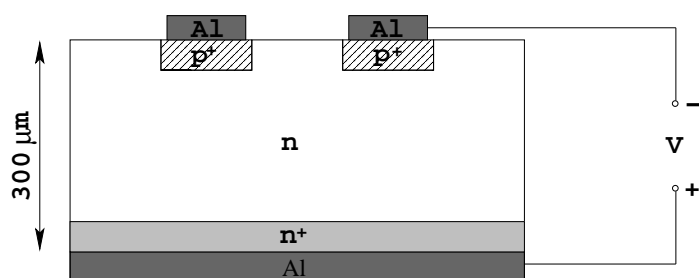
Eksperiment ATLAS bo zaznaval trke protonov pri težiščni energiji 14 TeV. Na sliki 1.1 vidimo detektor tega eksperimenta. Najbližje curku bodo ravno detektorji iz silicija, ki bodo delovali kot sledilne naprave za nabite delce. Taki delci namreč v siliciju z ionizacijo tvorijo pare elektron-vrzel.

Hitri projektili poškodujejo kristalno strukturo polprevodnikov. Zato se spremenijo njihove lastnosti. Te bomo opazovali v sledečih poglavjih.

Silicijev sledilec je sestavljen iz plasti p^+n diod v koncentričnih valjih okrog glavnega curka protonov. Diode so kvadratne ploščice s stranico 6 cm in debelino



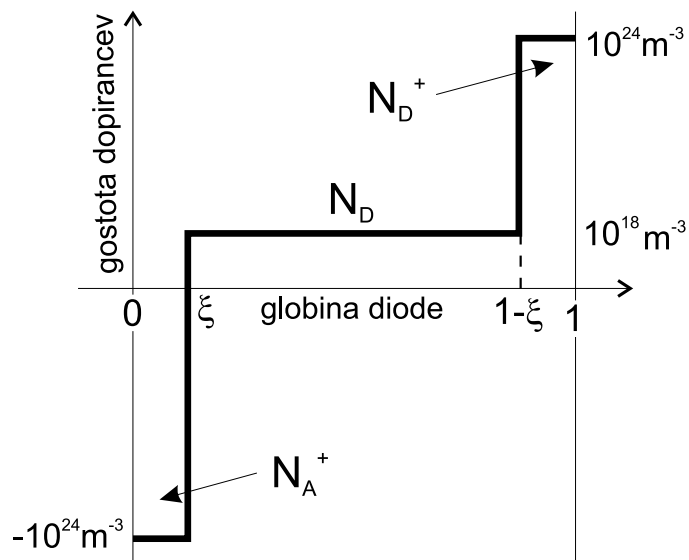
Slika 1.2: Notranji detektor bo reda velikosti človeka. Sestavljen bo iz plasti polprevodniških sledilcev, izpostavljenih radiacijskim poškodbam. V njem bomo zaznali nabite delce. Predvsem težki in hitri delci pa bodo poškodovali naš detektor [1].



Slika 1.3: Shema p^+nn^+ diode. V ozkih pasovih naparjeni aluminij skupaj z p -stranjo diode skrbi za pozicijsko ločljivost. Polje računamo samo pod temi pasovi in v njihovi bližnji okolici.

0.3 mm. Vsaka dioda (slika 1.3 je prečni prerez) ima naparjene ozke kovinske pasove, tako da lahko v vsakem zaznamo suneč toka. Vsaka plast zares nosi dva sloja diod. Oba ležita na istem valju, a imata drug napram drugemu zasukane pasove, tako da lahko dosežemo 3D ločljivost kraja reakcije delca s silicijevo strukturo.

Nabit delec pri preletu detektorja ustvari nekaj deset tisoč parov elektron-vrzel. V termično ravnovesnem siliciju je gostota lastnih parov okrog 10^{15} m^{-3} . V ploščici navedenih dimenzij je tako približno 10^9 prostih parov pri sobni temperaturi, torej bomo 10^4 dodatnih parov le stežka opazili. Da nam stopi dogodek iz ozadja, moramo detektor osiromašiti prostih nosilcev. Pri stiku polprevodnikov z različnimi primesmi nastane okrog stika osiromašena plast, ki jo lahko zunanja napetost še razširi. Zato je osnova detektorja dioda iz dveh plasti z različnimi primesmi. Osromašeno področje bo na strani z manj primesmi mnogo globlje in ne bomo potrebovali visokih napetosti za popolno osiromašenje diode. Področje z več primesmi pa naj bo čim tanjše, saj bo le plitvo osiromašeno. Dejansko pri izdelavi dosežemo debeline okrog $1 \mu\text{m}$. Ob debelini diode $a = 300 \mu\text{m}$ je torej relativna globina ξ približno tisočinka detektorja. Profil koncentracij primesi bomo torej opisali s funk-



Slika 1.4: Shema profila. Pretirana je debelina plasti z veliko primesmi na površini. Dejanska debelina je okrog $1 \mu\text{m}$, kar nam da za $\xi \sim 10^{-3}$. Ti dve plasti omogoča ohmski stik s kovino (Al). Srednja plast z nizko koncentracijo primesi omogoča prodor polja v globino in hitro siromašenje detektorja z naraščajočo zunanjo napetostjo.

cijo:

$$\Delta N(x) = \begin{cases} -N_A^+ (10^{24} \text{m}^{-3}) & x \leq \xi a, \\ N_D (10^{18} \text{m}^{-3}) & \xi < x < a(1 - \xi), \\ N_D^+ (10^{24} \text{m}^{-3}) & x \geq a(1 - \xi). \end{cases} \quad (1.1)$$

Dobro prevodni silicij na površini diode nam služi za dober ohmski stik med kovino in polprevodnikom. Zaradi velike gostote prostih nosilcev naboja se polje v tem območju izniči in ne prodira dalje v kovino.

Poglavje 2

Polprevodniki

2.1 Uvod

Življenja brez polprevodnikov si danes ne znamo več zamisliti. Skoraj v vsaki napravi se skriva majhen silicijev čip. Te zanimive strukture še danes niso povsem raziskane. Številna zanimiva dejstva, ki pa so dobro raziskana in potrjena, si bomo ogledali v pričujočem poglavju.

Začenjamo z definicijo. Polprevodniki so snovi s Fermijevo energijo v energijski špranji širine nekaj eV. Vzrok špranji so oblika kristala in elektronske lastnosti elementov. Najpogosteje uporabljan in tržno uspešen polprevodnik je silicij (Si), ki ga bodo uporabili tudi v ATLASu. Zato bomo računali s podatki zanj, ki jih najdemo v tabeli 2.1.

Kristal, sestavljen samo iz silicijevih atomov, brez nečistoč, imenujemo *čisti polprevodnik*¹. Takemu polprevodniku v mrežo vpletemo elemente III. oziroma V. skupine, da dobimo *polprevodnik s primesmi*. Če smo dodali primesi homogeno, je tak polprevodnik *homogen*. Ko polprevodnik vežemo v električni krog, zaradi zunanje napetosti ni več v termičnem ravnovesju. Proti koncu tega poglavja bomo zato omenjali *neravnovesni polprevodnik*. Ta imena smo in bomo še pogosto uporabljali, zato je prav, da se dogovorimo, kaj pomenijo.

Klasični računi polprevodniške fizike shajajo s številnimi poenostavitvami in z zanemarjanjem majhnih količin v enačbah. Naša tema pa posega ravno v to sivo področje, zato bo sledil precej obširen opis dveh najobičajnejših približkov. S tem hočemo jasno določiti kakšne približke bomo uporabili in kje so meje njihove zanesljivosti. Tako bo lažje slediti zaključkom in rezultatom naših računov.

2.2 Boltzmannov približek

Približek, ki ga bomo opisali v tem poglavju, nam bo pomagal določiti število prostih elektronov (n) in vrzeli (p), nosilcev naboja v kristalu. Gostoti sta povezani z osnovami kvantne statistične mehanike, s porazdelitvami. Ogledali si bomo približek

¹ang. intrinsic

Tabela 2.1: Podatki o siliciju. To so parametri računa, ki ga opravimo kasneje.

Parameter	simbol	vrednost
energijska špranja	E_g	1.12eV
masa prevodnih vrzeli	m_p^*	$0.16m_e$
masa prevodnih elektronov	m_n^*	$0.98m_e$
gibljivost vrzeli	μ_p	$0.45 \text{ m}^2/\text{Vs}$
gibljivost elektronov	μ_n	$1.5 \text{ m}^2/\text{Vs}$
dielektričnost	ε	11.9

in njegove posledice, zaključili pa z oceno o primernosti približka za nadaljnje računanje.

Elektroni so fermioni, zato sledijo Fermi-Diracovi porazdelitvi po energijskih stanjih, katerih gostoto opiše $\rho(E)$:

$$\frac{dN}{dE} = \rho(E) \frac{1}{1 + \exp((E - E_F)/k_B T)} \quad (2.1)$$

Spomnimo se energijskih pasov v siliciju (slika 2.3)! Med polnim valenčnim pasom in praznim prevodnim pasom zija špranja. Fermijeva energija, pri nizkih temperaturah meja, do katere so elektronska stanja zasedena, mora ležati nekje med zgornjo mejo valenčnega pasu (E_v) in spodnjo mejo prevodnega pasu (E_c), sicer ne bi opazili take zasedbe stanj. Prosti elektroni ležijo v prevodnem pasu, torej bo njihovo število:

$$N(T) = \int_{E_c}^{\infty} \rho(E) \frac{1}{1 + \exp((E - E_F)/k_B T)} dE$$

V okolici minimuma energijskih stanj, torej pri $E = E_c$ se elektroni obnašajo skoraj kot prosti. Skoraj, ker se še vedno gibajo v kristalnem polju. Zato upoštevamo v relaciji $E(k)$ prost parameter, efektivno maso m^* . Tako zapišemo $E(\mathbf{k}) - E_c = (\hbar k)^2/2m^*$:

$$\rho(E) dE = 2 \mathcal{V} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{4V\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \sqrt{2} \frac{\mathcal{V}}{\pi^2} \left(\frac{m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_c} \quad E > E_c \quad (2.2)$$

Integrand bomo torej računali od $E = E_c$ dalje. Recimo, da leži Fermijeva energija ravno nekje na sredini med E_c in E_v ². Takrat bo eksponent $e^{(E_c - E_F)/k_B T}$ enak $e^{(E_g/2)/k_B T} = e^{40} = 2 \times 10^{17}$, kar je dovolj, da ob tem zanemarimo +1 in nadomestimo porazdelitev z Boltzmannovo. Vidimo tudi, da bodo prispevki k integralu znatni le za energije povsem blizu E_c , tako da bomo res videli samo minimum dovoljenih stanj in bo opis energije s parabolo po \mathbf{k} še dodatno podkrepjen. Tako smo vpeljali Boltzmannov približek iz naslova. Uporabimo ga lahko

²Ta privzetek nas bo privedel do nadaljnjih poenostavitev, s katerimi bomo lahko določili Fermijevo energijo in se nato za nazaj prepričali, da je privzetek dober.

vedno, ko je Fermijeva energija dovolj oddaljena od roba pasu. Ker merimo razmik v $k_B T \sim 0.026 \text{ eV}$ ($T = 300 \text{ K}$), lahko ta približek uporabimo skoraj vedno.

Z njim poenostavimo zgornji integral v gama funkcijo:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \left(\frac{m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_{E_c}^{\infty} \sqrt{E - E_c} e^{-\frac{E - E_F}{k_B T}} dE \quad (2.3)$$

$$= N_c(T) e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} \quad (2.4)$$

Uvedli smo gostoto stanj v prevodnem pasu N_c :

$$N_c(T) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{k_B T m_n^*}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} = 2.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \text{ pri } T = 300 \text{ K} \quad (2.5)$$

V izrazu za gostoto prostih elektronov smo zapisali m_n^* , efektivno maso elektronov v minimumu. Podatke za silicij daje tabela 2.1.

Povsem podobno se ukvarjamo tudi z vrzeli, le da upoštevamo, da je njihova porazdelitev sorazmerna z $1 - F(E)$, kjer je $F(E)$ Fermijeva porazdelitev. Spet iz istih razlogov zanemarimo enko v imenovalcu in končamo s:

$$p = P_v(T) e^{\frac{E_v - E_F}{k_B T}} \quad (2.6)$$

$$P_v(T) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{k_B T m_p^*}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} = 1.6 \times 10^{27} \text{ m}^{-3} \text{ pri } T = 300 \text{ K} \quad (2.7)$$

Z m_p^* smo označili efektivno maso vrzeli v maksimumu valenčnega pasu.

V čistem polprevodniku bo enako prevodnih vrzeli in elektronov, to gostoto označimo z n_i :

$$n_i = p = n = \sqrt{pn}, \quad (2.8)$$

$$= \sqrt{N_c P_v} e^{-E_g / 2k_B T} \quad (2.9)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_e^2} \right)^{3/4} \left(\frac{m_e k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-E_g / 2k_B T} \quad (2.10)$$

$$\sim 2.4 \times 10^{15} \text{ m}^{-3} \quad (T = 300 \text{ K}), \quad (2.11)$$

Fermijeva energija E_F v čistem polprevodniku je E_i , določimo pa jo iz enačbe (2.8):

$$E_i = \frac{E_c + E_v}{2} - \frac{3}{4} k_B T \ln \left[\frac{m_n^*}{m_p^*} \right] \quad (2.12)$$

V siliciju (tabela 2.1) je E_i odmaknjena od sredine pasu le za 0.035 eV, torej Boltzmannov približek drži.

Namesto zapletenih izrazov (2.3), (2.4), (2.6) lahko vse značilnosti polprevodnika opišemo s tremi parametri: E_i , E_F in n_i . Zgornje relacije prepisemo v novi enačbi:

$$n = n_i e^{\frac{E_F - E_i}{k_B T}} \quad (2.13)$$

$$p = n_i e^{\frac{E_i - E_F}{k_B T}} \quad (2.14)$$

V okviru približka lahko iz zgornje enačbe določimo Fermijevo energijo v polprevodniku s primesmi. Enačba za električno nevtralnost se spremeni v:

$$p - n + N_D - N_A = p - n + \Delta N = 0, \quad (2.15)$$

kjer smo zaporedoma z N_D in N_A označili *gostoto* donorjev oziroma akceptorjev. Ker smo Fermijevo energijo dobili blizu sredine pasu, smo predpostavili tudi ionizirane primesi in približek bomo spet lahko potrdili za nazaj. Splošno nam primesi opiše zgoraj definirana funkcija ΔN . V enačbo (2.15) vstavimo Boltzmannov približek in dobimo:

$$E_F - E_i = k_B T \sinh^{-1} \left[\frac{\Delta N}{2n_i} \right] \sim k_B T \ln \left[\frac{\Delta N}{n_i} \right],$$

kjer je približek narejen za presežek donorjev nekaj velikostnih redov nad gostoto nosilcev v čistem polprevodniku. Vidimo, da je odmik Fermijeve energije od vrednosti v čistem polprevodniku odvisen od logaritma gostote dodanih primesi. Šele znatni dodatki bodo torej občutno premaknili Fermijevo energijo. Torej bodo primesi v polprevodniku vedno ionizirane.

Za konec še meje veljavnosti. Kasneje se bomo ukvarjali s silicijem, s primesjo 10^{24}m^{-3} tujih atomov. Pri tej gostoti se Fermijeve energija torej premakne za :

$$k_B T \ln \left[\frac{10^{24}}{2.4 \times 10^{15}} \right] \sim 0.50 \text{eV},$$

kar nam da pri polovični širini špranje $E_g/2 = 0.56 \text{eV}$ nekaj odstotno napako ($1/e^3$) pri zamenjavi Fermijeve porazdelitve z Boltzmannovo. Tega se bomo morali pri nadaljnjem računu zavedati, vendar pa bomo gostotno porazdelitev še nadalje uporabljali kot Boltzmannovo.

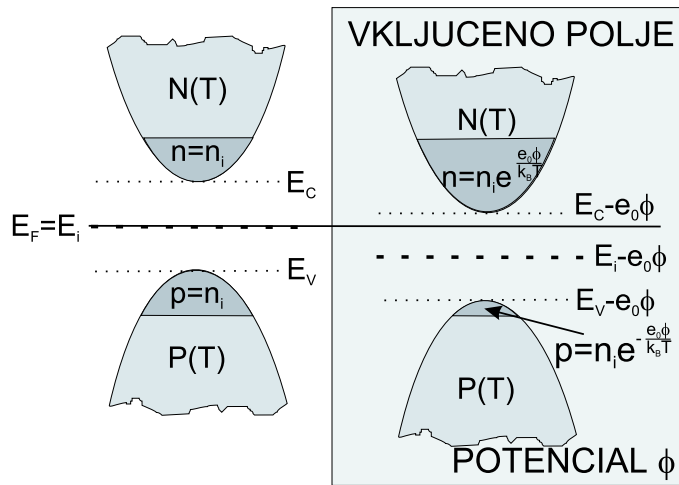
2.3 Približek popolnoma osiromašenih plasti

Ta približek uporabljamo, ko opisujemo nehomogene polprevodnike. Na stiku različnih tipov polprevodnikov se namreč pojavi plast z malo nosilci naboja. V približku popolnoma osiromašenih plasti pa rečemo, da so te plasti popolnoma brez prostih nosilcev naboja. Veljavnost in uporabnost tega približka pa bo tema pričujočega dela.

Najprej si pripravimo teren z uvedbo novih parametrov. Vpiv električnih sil opišemo z električno potencialno energijo $e_0 \phi$, kjer je ϕ električni potencial. Sledeč temu zgledu lahko celotno energijsko lestvico predelamo v potence:

$$E_i = e_0 \psi \quad (2.16)$$

$$E_F = e_0 \varphi \quad \text{Fermijev potencial} \quad (2.17)$$



Slika 2.1: Vplivi električnega potenciala na skoraj proste nosilce naboja v polprevodniku. Namesto da bi spremenili samo Fermijevo energijo, premaknemo vzdolž potenciala kar celo strukturo energijskih nivojev. S tako premaknjenimi nivoji nam električnega polja ni treba več upoštevati.

Najpreprostejši nehomogen polprevodnik je sestavljen iz dveh polprevodnikov. V polprevodniku tipa n so elektroni večinski nosilci in so zasedli stanja nad E_c . V polprevodniku tipa p pa je prevodnih elektronov malo in so zato stanja nad E_c večinoma prazna. Ko sta oba tipa v fizičnem stiku bodo elektroni z roba polprevodnika n poskušali zasedati prazna stanja v polprevodniku p . S tem bodo zapustili ionizirane donorske atome na n strani stika, hkrati pa se bodo rekombinirali z večinskimi nosilci na p strani stika, kar bo pustilo ionizirane akceptorske atome. Sčasoma bo statičen naboj ioniziranih primesi ustvaril dovolj močno polje, da se bo tok elektronov ustavil. Enako se dogaja tudi z vrzelmi, samo da tok steče v drugo smer. Posledica teh dveh procesov bo majhno število nosilcev naboja blizu stika in pojav električnega polja v termično ravnovesnem polprevodniku.

Zgornji pojav lahko dobro opišemo tudi s pomočjo energijske slike pasov v polprevodniku. V termičnem ravnovesju bo namreč Fermijeva energija v staknjenem polprevodniku konstantna. Na eni strani stika je bližje prevodnemu, na drugi pa bližje valenčnemu robu prepovedanega pasu (glej sliko 2.2). Zato sta višini robov npr. valenčnega pasu levo in desno od stika različni, razmiki med pasovi, skupaj z energijsko špranjo, pa se niso spremenili. Energijske nivoje je premaknil električni potencial ϕ , zato se v okolici stika pojavi električno polje (slika 2.3) $\Theta = \nabla\phi$. Premaknjene vrednosti zaradi potenciala so:

$$E_i \rightarrow E_i - e_0\phi \quad \text{oziroma} \quad \psi \rightarrow \psi - \phi \quad (2.18)$$

$$E_c \rightarrow E_c - e_0\phi \quad (2.19)$$

$$E_v \rightarrow E_v - e_0\phi \quad (2.20)$$

Električno polje torej preprečuje večinskim nosilcem prehod preko stika.

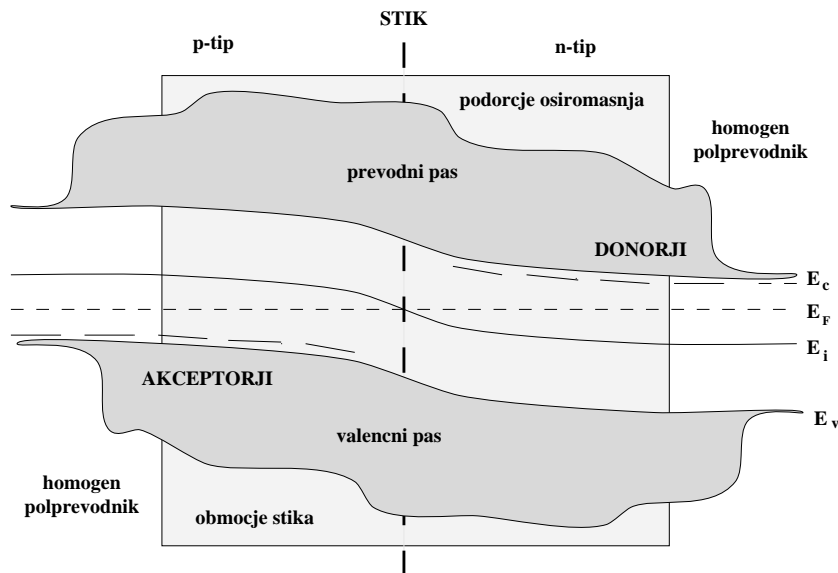
Potencial ψ je do predznaka enak pravemu električnemu potencialu s primerno izbrano ničlo. Zato mu rečemo kvazi-potencial. Zanj brez težav zapišemo Poisso-

ново enačbo:

$$\nabla^2 \psi(x) = -\nabla^2 \phi(x) = \frac{\rho_e(x)}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{e_0}{\epsilon \epsilon_0} (p - n + \Delta N(x)) = \quad (2.21)$$

$$= \frac{e_0}{\epsilon \epsilon_0} \left(2n_i \sinh \left[(\psi(x) - \varphi(x)) e_0 / k_B T \right] + \Delta N(x) \right). \quad (2.22)$$

Tako bomo potencial nadomestili s kvazi-potencialom, kar se bo pokazalo kot primernejši pristop, saj so vsi nivoji določeni relativno glede na E_i , ki nam ga predstavlja kvazi-potencial.



Slika 2.2: Potek energijskih nivojev v eni dimenziji pri $p - n$ stiku. To je stik polprevodnikov z različnimi primesmi, donorjev in akceptorjev. Levo imamo veliko akceptorjev, zato je Fermijeva energija blizu spodnjega roba pasu. Desno imamo donorske nivoje, Fermijeva energija je blizu vrha špranje. Izenači se Fermijeva energija, zato pride do skoka potenciala, ki ga opišemo z E_i oziroma kvazi-potencialom. Skupaj s potencialom se spreminjajo tudi ostale energijske konstante polprevodnika-spodnji rob prevodnega in zgornji rob valenčnega pasu. Ob stiku nastane področje osiromašnja, kjer je malo nosilcev naboja. Zunaj tega območja je polprevodnik homogen in nevtralen.

Za $p - n$ stik lahko določimo obliko potenciala v okviru približka:

$$\Delta N(x) = \begin{cases} -N_A & x \leq 0, \\ N_D & x > 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Plast debeline $x_n + x_p$ okrog stika naj bo povsem brez prostih nosilcev, zato se bo v njej pojavil statični naboj ioniziranih primesi. Debelini x_n in x_p zaporedoma

pomenita debelino plasti v polprevodniku tipa n oziroma p .

$$\nabla^2 \psi(x) = \begin{cases} 0, & x < x_p \\ -\frac{e_0}{\epsilon \epsilon_0} N_A, & x_p \leq x < 0 \\ +\frac{e_0}{\epsilon \epsilon_0} N_D, & 0 \leq x < x_n \\ 0, & x \geq x_n \end{cases} \quad (2.24)$$

Rešitve zgornje enačbe so parabole. Določimo skok kvazi-potenciala preko stika in debelino popolnoma osiromašene plasti v okviru približka:

$$\Delta\phi^{(0)} = -\Delta\psi = -(\psi(\infty) - \psi(-\infty)) = +\frac{k_B T}{e_0} \ln \left[\frac{N_D N_A}{n_i^2} \right], \quad (2.25)$$

$$\frac{x_n}{x_p} = \frac{N_A}{N_D} \quad (2.26)$$

$$x_n + x_p = \sqrt{\frac{2\Delta\phi^{(0)}\epsilon\epsilon_0}{e_0}} \left(\sqrt{\frac{1}{N_A}} + \sqrt{\frac{1}{N_D}} \right). \quad (2.27)$$

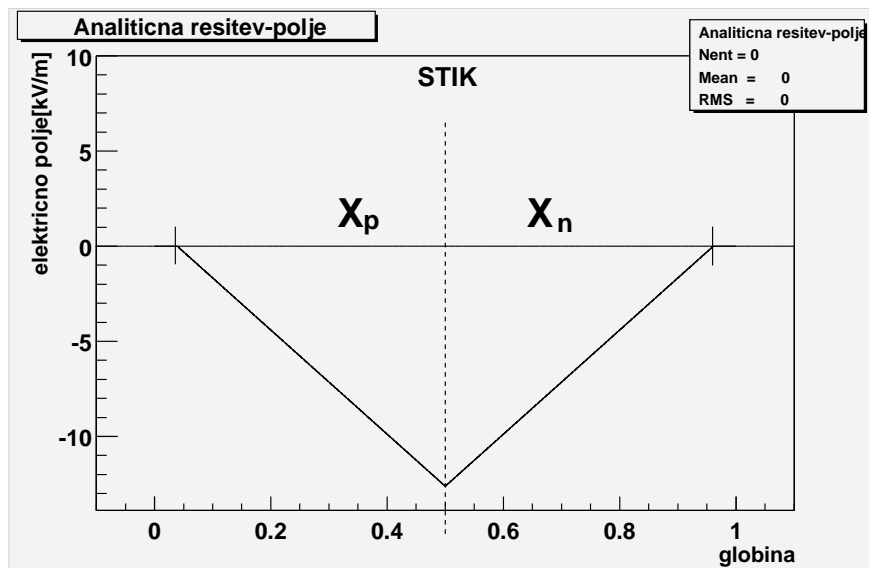
V računu za ψ smo zanemarili proste nosilce nabojev v osiromašeni plasti. Z izračunanim ψ pa jih lahko v skladu z (2.13) in (2.14) določimo in se tako izognemo nezveznosti gostot na meji tega območja. Tako smo dopustili tudi difuzijo.

Drugače pa je z neravnovesnim polprevodnikom. Podobno sicer lahko izračunamo električno polje. Zunanji potencial naj polprevodniku vsilita kovinski plošči, na različnih potencialih. Stik med kovino in polprevodnikom naj ne bo Schottkyev, ampak ohmski. Koordinatni sistem postavimo z izhodiščem v stiku in robovoma polprevodnika pri $-a/2$ oziroma $a/2$. Profil koncentracij primesi (2.23) je enak kot prej. Spet predpostavimo popolnoma osiromašeno območje med $-x_p$ in x_n . Zahtevajmo $a \gg x_n, x_p$. Med $-a/2$ in $-x_p$ bo polprevodnik električno nevtralen pri Fermijevi energiji, ki jo narekuje kovinska plošča pri $x = -a/2$. Med x_n in $a/2$ bo polprevodnik ravnovesen pri Fermijevi energiji, ki jo narekuje potencial plošče pri $a/2$. Leva in desna stran polprevodnika bosta pri različnih potencialih in s tem Fermijevih energijah, sicer pa se razmere ne bodo spremenile. Rešitve so še vedno parabole, potencialni skok preko stika pa bo enak vsoti vsiljenega potencialnega skoka in skoka termično ravnovesnega polprevodnika. Višji potencial na p strani napram potencialu na n strani bo potencialni skok manjšal, torej bo napetost *pre-pustna*, nižji pa ga bo večal, napetost bo *zaporna*. Globina stika je sorazmerna kvadratnemu korenu napetosti.

$$\Delta\phi = \Delta\phi^{(0)} + V \quad (2.28)$$

$$x_n + x_p = \sqrt{\frac{2(\Delta\phi^{(0)} + V)\epsilon\epsilon_0}{e_0}} \left(\sqrt{\frac{1}{N_A}} + \sqrt{\frac{1}{N_D}} \right) \quad (2.29)$$

Kljub uspehu, ki ga ima zgornja enačba pri opisu $p - n$ stika v polprevodniku, pa ima približek neskladnost. Poskušajmo določiti tok v neravnovesnem polprevodniku!



Slika 2.3: Rešitev električnega polja za naveden $p-n$ stik v termičnem ravnovesju, približek popolnoma osiromašenih plasti. Primerjaj s sliko 2.2. Polje je linerano, zlomljeno v stiku. Globina stika je območje, kjer je polje različno od 0. Stik je pri $\xi = 0.5 a$, $N_A = N_D = 5 \times 10^{16} \text{m}^{-3}$, $a = 300 \mu\text{m}$.

2.4 Tokovi v okviru približkov

Videli smo, da lahko z opisanimi približkoma dovolj dobro opišemo razširjanje električnega polja po nehomogenem polprevodniku. Posledica neravnovesja pa je tudi električni tok. Zapisali bomo enačbo zanj in se prepričali, da v okviru približka popolnoma osiromašenih plasti električnega toka ne moremo opisati po celem polprevodniku. To bo argument za podrobno obravnavo generacije in rekombinacije v naslednjem poglavju.

V okviru Drudove teorije dosežejo nosilci naboja končno komponento hitrosti v smeri polja kljub stalni sili, saj izgubljajo prirastek hitrost pri trkih s kristalno mrežo. Hitrost je tako sorazmerna jakosti električnega polja Θ , sorazmernostni člen je gibljivost μ :

$$v_n = \mu_n \Theta \quad (2.30)$$

Podobno konstanto (μ_p) lahko vpeljemo tudi za vrzeli. Zaradi majhne gibljivosti v polprevodnikih je difuzijski tok primerljiv s tokom zaradi električnih sil, zato izračunamo električni tok elektronov kot vsoto:

$$J_n = |e_0| (n\mu_n \Theta + D_n \nabla n) \quad (2.31)$$

Upoštevamo, da imajo vrzeli pozitiven naboj in da teče tok v nasprotni smeri gibanja elektronov, pa imamo podoben izraz tudi za električni tok vrzeli:

$$J_p = |e_0| (p\mu_p \Theta - D_p \nabla p) \quad (2.32)$$

V ravnovesju lahko določimo zvezo med difuzijsko konstanto in gibljivostjo. Prepišimo najprej Boltzmannovo relacijo (2.13) in (2.14) s kvazi-potencialom ψ in Fermijevim potencialom, merjenima v termični napetosti $V_T = k_B T / e_0$:

$$n = n_i e^{\varphi - \psi} \quad (2.33)$$

$$p = n_i e^{\psi - \varphi} \quad (2.34)$$

Prepisani Boltzmannovi relaciji (2.33) in (2.34) vstavimo v enačbo (2.31) in upoštevamo, da tokov v ravnovesju ni:

$$-n\mu_n \nabla \psi + D_n n \frac{e_0}{k_B T} (\nabla \psi - \nabla \varphi) = 0, \quad (2.35)$$

Fermijeva energija se v ravnovesju ne spreminja ($\nabla \varphi = 0$), zato nam ostane ti. Einsteinova relacija:

$$D_n = \frac{k_B T}{e_0} \mu_n \quad (2.36)$$

ki velja tudi za vrzeli. Opozorimo naj, da velja zgornje le v okviru Boltzmannovega približka.

Hkrati vidimo, da bo šele variacija Fermijevega potenenciala ($\nabla \varphi \neq 0$ v enačbi (2.35)) pognala tok po polprevodniku v okviru našega približka:

$$J_n = -n\mu_n \nabla \varphi \quad (2.37)$$

Vendar pa nam približek popolnoma osiromašenih plasti ne daje mehanizmov za spreminjanje Fermijeve energije. S pomočjo enačb za tokove, posledico generacije in rekombinacije, bomo to variacijo določili in tako presegli približek popolnoma osiromašenih plasti.

Poglavje 3

Generacija in rekombinacija, sevalne poškodbe

3.1 Uvod

V poglavju Polprevodniki smo si ogledali dva temeljna približka polprevodniške fizike. Drugi približek ni mogel pojasniti tokov v polprevodniku. Zato se jih bomo lotili bolj natančno. Ne bomo mogli mimo generacije in rekombinacije. Proces bomo opisali in izvlekli kvantitativno enačbo. Sistem enačb pa bomo oblikovali v naslednjem poglavju.

V razdelku 2.3 smo videli, da je približek popolnoma osiromašenih plasti za točen izračun tokov v polprevodniku premalo. Upoštevati moramo namreč generacijo in rekombinacijo nosilcev v samem polprevodniku. Izpeljava enačb za generacijo in rekombinacijo pa bo hkrati tudi pojasnila vpliv sevalnih poškodb na značilnosti polprevodnika.

Dopustili bomo, da se vsi potenciali spreminjajo po vsem detektorju. Tako ne bo obstajala *osiromašena* plast oziroma *termično ravnovesna* plast, pač pa bo polprevodnik enoten, povesod pa bomo upoštevali termično neravnovesje.

V vsakem trenutku število prostih nosilcev naboja, recimo elektronov, uravnava kontinuitetna enačba:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\nabla \mathbf{J}_n}{-e_0} + \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Če bi bil parcialni odvod nosilcev naboja po času enak 0, kot je to navada za tok vode, bi bil v stacionarnem stanju tudi tok po polprevodniku konstanten. Vendar pa se ohranja samo skupni električni tok, tok vrzeli in elektronov zase pa ne. Tako je:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = U_n(x)$$

Količina $U(x)$ z enotami [delec/m³s] je razlika med generacijo in rekombinacijo parov elektron-vrzel v kristalu. V nadaljevanju tega poglavja opišemo mesta v kristalu - pasti, na katere sta vezana tako prva kot slednja. Število teh pasti se močno poveča,

ko so silicijevi kristali izpostavljeni velikim dozam sevanja. Izpeljava v tem poglavju je torej vir popravkov električnega polja zaradi sevalnih poškodb. V termičnem ravnovesju je $U(x) = 0$, zato morajo med koeficienti centrov vladati zveze, ki jim je namenjen tretji del poglavja. V zadnjem delu strnemo znanje v obliko funkcije $U(x)$, najprej za posamezen tip pasti, nato pa enačbo še malo posplošimo.

3.2 Globoki nivoji

Generacija in rekombinacija je proces podoben toku kraških rek. Elektroni in vrzeli lahko v kristalu poniknejo ali pa se rodijo. Ta zanimivost je sicer dobro znana kot edina razlaga konstantnega toka v povsem osiromašenem polprevodniku. Sam proces še nima koherentne teorije¹. Nekatera sodobna odkritja pa nakazujejo nove ideje. Ena od teh je temelj našega modela in si jo moramo zato ogledati [5].

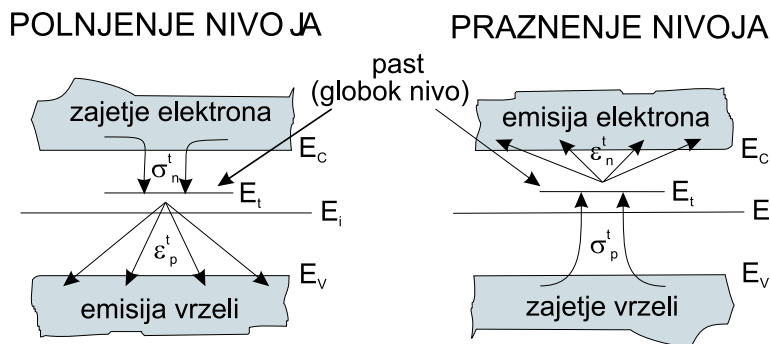
Tok hitrih projektilov skozi kristal pusti v snovi številne deformacije. Preseki za reakcije na gradnikih namreč niso zanemarljivi. Za nas zanimive posledice teh reakcij so novi elektronski nivoji, ki nastanejo blizu sredine prepovedanega pasu. Zato jih imenujemo globoki nivoji. Točen vzrok zanje je verjetno deformirana kristalna mreža [6].

Ti globoki nivoji postanejo centri generacije in rekombinacije. Zaradi velike oddaljenosti od prevodnih nivojev (pol energijske špranje) imajo mešane značilnosti med diskretnimi donorskimi nivoji (ki so večinoma prazni) in zveznim spektrom lastnih nosilcev v prevodnem in valenčnem pasu. Vpeljati moramo izraze za verjetnost zajetja (absorpcije) in verjetnost emisije. Verjetnost zajetja na določen energijski nivo je verjetnost ujetja nosilca naboja na tem energijskem nivoju. S tem nastane iz prostega nosilca naboja prostorsko porazdeljen nepremičen naboj. Verjetnost emisije je verjetnost obratnega procesa. Naboj, ujet na pasti, postane prost nosilec naboja. Oglejmo si ti konstanti za nivoje primesi in za lastne nosilce.

Spodnji rob prevodnega pasu je le nekaj $k_B T$ višje od nivojev primesi. Torej lahko za proste nosilce naboja privzamemo dostopnost ostalih stanj blizu spodnjega roba prevodnega pasu kot enako dostopnosti nivojev primesi. Prvih je neprimerno več, saj govorimo o zveznem spektru. Torej bo verjetnost, da se bo elektron ujel ravno na nivo dopirancev, zanemarljivo majhna. Verjetnost emisije pa je prav tako majhna, saj so nivoji prazni.

Pri lastnih nosilcih, npr. elektronih, pa bi morali za vsak poln nivo v valenčnem pasu določiti skupno verjetnost za preskok v kateregakoli od praznih nivojev v prevodnem pasu. Te verjetnosti bi morali nato še sešteti za vse polne nivoje vezanih delcev. Integral bi pomenil verjetnost emisije delca iz vezanega stanja v prevodni pas. Verjetnost zajetja pa bi določili iz enakosti tokov delcev preko energijske špranje. Tokov v polprevodniku brez zunanjih virov napetosti namreč ni.

¹Nekateri pravijo rekombinacija skupnemu procesu [2], drugi procesa ločujejo [3]. Za nekatere je to krajevno neodvrsien proces [2], drugi se trudijo z Shockley-Read-Hallovno enačbo[4]. Naša interpretacija sledi [5].



Slika 3.1: Pasti se polnijo z emisijo vrzeli ali z zajetjem elektrona, praznijo pa z emisijo elektrona ali zajetjem vrzeli. V termičnem ravnovesju je število emitiranih elektronov enako številu zajetih. Enako za vrzeli. V stacionarnem stanju je presežek emitiranih elektronov enak presežku emitiranih vrzeli. Odtod enačbe za konstante. Energijsko razliko E_t merimo od E_i , saj v enačbah izgubimo odvisnost od Fermijeve energije. Že prej pa smo videli, da je struktura energijskih nivojev vezana na potencial, skrit v E_i , torej kvazi-potencialu.

Energijski pasovi, ki jih povzročijo globoki defekti - pasti, pa so ravno sredi prepovedanega pasu. Zato se obnašajo hkrati kot pasti za elektrone in vrzeli. Proces polnitve nivoja gre torej kot zajetje prostega elektrona iz prevodnega pasu ali kot emisija vrzeli v valenčni pas - slednje je enako kot zajetje vezanega elektrona iz valenčnega pasu (glej sliko 3.1). Podobno gre proces praznjenja nivoja kot emisija elektrona v prevodni pas ali kot zajetje vrzeli iz valenčnega pasu - spet je slednje enako emisiji vezanega elektrona v valenčni pas. Za vsako vrsto pasti (indeks t) potrebujemo torej štiri koeficiente, ki pa so k sreči med seboj povezani. Vse nadaljnje količine bomo določili za en tip pasti, o porazdelitvah pasti pa bomo govorili kasneje.

3.3 Povezave med koeficienti pasti

V termičnem ravnovesju je tok nosilcev iz prevodnega pasu na past enak 0, zato sta emisija in absorpcija enaki. Absorpcijo določimo iz presekov za zajetje. Začnimo z elektroni. Njihova hitrost gibanja po kristalu je določena s temperaturo, saj jih ne vzbuja nobeno drugo polje. Rezultat prepisemo iz kinetične teorije plinov ($v^{th} = \sqrt{3k_B T/m^*}$, m^* je efektivna masa delca v prevodnem pasu). Verjetnost za zajetje je produkt gostote prostih elektronov, njihove hitrosti in preseka za zajetje. Zato je²:

$$w_n^t = n v_n^{th} \sigma_n^t \quad (\approx 30 \text{ s}^{-1}) \quad (3.2)$$

Verjetnost zajetja je odvisna od gostote prevodnih delcev, zato definirajmo verjetnost na enoto gostote in temu recimo koeficient zajetja:

$$c_n^t = v_n^{th} \sigma_n^t \quad (3.3)$$

²Ocenjenjene vrednosti pri $n = p = n_i$, $T = 300 \text{ K}$, $\sigma = 10^{-19} \text{ m}^2$

Seveda velja enako za vrzeli, dobimo:

$$w_p^t = p v_p^{th} \sigma_p^t \quad (\approx 70 \text{ s}^{-1}) \quad (3.4)$$

$$c_p^t = v_p^{th} \sigma_p^t \quad (3.5)$$

Podobno kot za zajetje, definiramo konstanti tudi za emisijo. ε^t naj bo verjetnost na časovno enoto, da bo naboj prešel iz pasti v prevodni oziroma valenčni pas, kjer bo prost nosilec naboja. Vidimo, da bo povprečen čas, ki ga delec preživi na pasti, ravno inverz te količine: $\tau^t = \frac{1}{\varepsilon^t}$, za vsako vrsto naboja seveda.

Prost nivo lahko absorbira delec, zaseden nivo lahko delec odda. Verjetnost, da je nivo z energijo E zaseden, podaja funkcija, podobna Fermijevi porazdelitvi $F_g(E + t) = 1 / (1 + \frac{1}{g} \exp((E_t - E_F) / k_B T))$. Faktor g meri degeneracijo nivoja E_t . Za naše približke bomo privzeli le degeneracijo po spinu, torej $g = 2$. Naj bo gostota pasti z energijo E_t kar N_t . Torej bo gostota zasedenih pasti enaka $N_t F_g(E_t)$, gostota prostih pa $N_t (1 - F_g(E_t))$. Gostota izsevanih elektronov bo torej $N_t F_g(E_t) \varepsilon_n^t$ in bo enaka gostoti absorbiranih elektronov $N_t (1 - F_g(E_t)) n c_n^t$:

$$N_t F_g(E_t) \varepsilon_n^t = N_t (1 - F_g(E_t)) n c_n^t \quad (3.6)$$

Nadomestimo gostoto prostih nosilcev po Boltzmannu (2.13) in izraz poenostavimo. Enako storimo tudi za vrzeli, le da tu emitirajo prazni, absorbirajo pa polni nivoji. Tako dobimo povezave za verjetnost emisije delca z nivoja t (vrednosti za $E_t - E_i = 0.05\text{eV}$):

$$\varepsilon_n^t = \frac{c_n^t n_i}{g} e^{(E_t - E_i) / k_B T} \quad (\approx 200 \text{ s}^{-1}) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_p^t = c_p^t n_i g e^{-(E_t - E_i) / k_B T} \quad (\approx 10 \text{ s}^{-1}) \quad (3.8)$$

Vloga Fermijeve energije je zdaj prevzela E_i . Torej so zveze odvisne od *relativnega* razmika med pasovi v polprevodniku in neodvisne od zunanje napetosti, ki spremeni nivoje glede na Fermijevo energijo. Degeneracija nam efektivno premakne energijski nivo pasti, zato ga lahko ustrezno spremenimo in se z degeneracijo ne ukvarjamo več:

$$E_t \rightarrow E_t + k_B T \ln g \quad (3.9)$$

Izpeljali smo splošno zvezo, ki jo lahko uporabimo za vsak nivo E_t .

3.4 Generacija in rekombinacija

Pripravljen orodje bomo uporabili za določitev funkcije $U(x)$ iz uvoda tega poglavja. Računanje si olajšamo z vpeljavo:

$$x_t = e^{(E_t - E_i) / k_B T} \quad (3.10)$$

Generacija delcev je pravzaprav emisija, rekombinacija pa zajetje. Lahko bi obravnavali vsak proces zase, vendar nas zanimajo parcialni odvodi $\partial n/\partial t$ in $\partial p/\partial t$, ki so pravzaprav presežek generacije istoimenskih nosilcev naboja. Zato definiramo že omenjeno funkcijo $U = (G - R)$. Zasedenost nivoja definiramo kot verjetnost, da je nivo zaseden. Ob zasedenosti nivoja P_t je:

$$\begin{aligned}\frac{U_n^t}{N_t} &= P_t \varepsilon_n^t - (1 - P_t) n c_n^t = c_n^t [n_i P_t x_t - (1 - P_t) n] \\ \frac{U_p^t}{N_t} &= (1 - P_t) \varepsilon_p - P_t c_p^t p = c_p^t [n_i (1 - P_t) / x_t - P_t p]\end{aligned}$$

V stacionarnem stanju je presežek generacije vrzeli enak presežku generacije elektronov, torej je $U_t = U_n^t = U_p^t$, kar nam da pogoj za določitev zasedenosti nivoja:

$$P_t = \frac{nc_n^t + n_i c_p^t / x_t}{nc_n^t + p c_p^t + n_i c_p^t / x_t + n_i c_n^t x_t}. \quad (3.11)$$

Zgornja enačba velja za vsak nivo, torej tudi za običajne akceptorje in donorje. Samo konstante so različne. Ob predpostavki, da so preseki za zajetje podobni tistim za pasti, lahko ocenimo zasedenost primesi. Po vzoru (3.10) vpeljimo:

$$x_A = e^{(E_A - E_i)/k_B T} \sim e^{(E_V - E_i)/k_B T} \sim e^{-E_g/2k_B T} \sim e^{-40} \quad (3.12)$$

Podobno bo tudi $x_D \sim e^{40}$.

V izrazu za P_A bodo prevladali členi z $1/x_A$, torej bo $P_A \sim 1$. Akceptorji bodo torej zasedeni in negativni, torej ionizirani, vedno ko velja Boltzmannov približek.

V izrazu za P_D bodo prevladali členi z x_D , ti pa so le v imenovalcu in $P_D \sim 0$. Torej bodo donorski nivoji prazni, kar spet pomeni ionizirani vedno, kadar velja Boltzmannov približek.

Zdaj lahko izračunamo tudi $U(x)$, ki ga potrebujemo v naših enačbah:

$$U^t(x) = N_t \frac{c_n^t c_p^t}{n(x) c_n^t + p(x) c_p^t + n_i c_p^t / x_t + n_i c_n^t x_t} (n_i^2 - n(x) p(x)), \quad (3.13)$$

$$= y_t (n_i^2 - np) \quad (3.14)$$

Vidimo, da ima enačba za presežek generacije zanimivo strukturo. Sorazmerna je namreč členu $n_i^2 - np$, kar pomeni, da v termično ravnovesnem polprevodniku ni presežka generacije nad rekombinacijo. To je seveda posledica zahteve, da je takrat emisija enaka absorpciji. Presežek generacije je dobro merilo za ravnovesnost stanja.

Rešili smo enačbe za eno vrsto pasti. Vsaka je podana z energijskim nivojem, preseki za zajetje elektronov in vrzeli in gostoto po kristalu. Te podatke določimo eksperimentalno (glej tabelo 5.1).

Celoten presežek generacije delcev je vsota U^t po vseh vrstah pasti. Izraz za presežek bo torej:

$$U(x) = \sum_t U^t(x)$$

Tu bi se zgodba lahko končala. Vendar smo že omenili, da na globokih nivojih ujeti nosilci naboja predstavljajo statičen naboj. Ta naboj (Q^{deep}) lahko z zasedenostjo P_t zlahka določimo za vsako vrsto pasti. Eksperimentalni podatek, ki je na voljo za vsako past, poleg energije E_t in presekov σ za zajetje elektronov oziroma vrzeli, je tudi predznak statičnega naboja ujetih nosilcev. Glede na to ločimo akceptorske in donorske pasti. Po analogiji so ionizirane akceptorske pasti negativno nabite, torej bo naboj enak produktu osnovnega s številom zasedenih globokih nivojev, z zasedenostjo P_t torej $Q_A = -e_0 N_t P_t$. Ionizirane donorske pasti so pozitivno nabite, zato je naboj enak produktu števila praznih pasti in osnovnega naboja, torej $Q_D = e_0 N_t (1 - P_t)$. V Poissonovo enačbo (2.21) pa moramo dodati vsoto naboja po vseh nivojih, upoštevajoč pravilne predznake:

$$Q^{\text{deep}} = e_0 \left[\sum_{t, \text{donorji}} (1 - P_t) N_t - \sum_{t, \text{akceptorji}} P_t N_t \right] \quad (3.15)$$

V tem poglavju nam je uspelo določiti generacijo in rekombinacijo v širokem spektru polprevodnikov. Tako se lahko pogumno lotimo končnega zapisa sistema enačb in usmerimo vse sile v njegovo reševanje.

Poglavje 4

Reševanje sistema enačb

4.1 Uvod

To poglavje je namenjeno ponovitvi dejstev, zbranih v poglavjih Polprevodniki in Generacija in rekombinacija. Izsledke obeh poglavij lahko namreč združimo v sistem treh diferencialnih enačb drugega reda. Prva enačba je Poissonova (2.21), v kateri upoštevamo dodatno statično gostoto naboja na globokih nivojih (3.15):

$$\nabla^2 \psi = \frac{e_0}{\varepsilon \varepsilon_0} (p - n + \Delta N(x) + Q^{\text{deep}}) \quad (4.1)$$

Par preostalih enačb pa sta kontinuitetni enačbi za elektrone(3.1) in vrzeli:

$$\frac{\nabla J_n}{-e_0} = U(x) \quad (4.2)$$

$$\frac{\nabla J_p}{e_0} = U(x) \quad (4.3)$$

Še preden se lotimo samega reševanja enačb, pa si oglejmo nekatere posledice izpeljav iz prvih poglavij. Pri enačbi (3.13) smo opazili, da presežka generacije nad rekombinacijo ne more biti, če je $pn = n_i^2$. Vendar pa zapis Boltzmannovega približka v (2.13) in (2.14) trdi prav to. Torej moramo Boltzmannov približek spremeniti, da nam bo lahko opisal tudi termično neravnovesje. Najpreprostejša pot je vpeljava različnih Fermijevih nivojev za vrzeli in elektrone [7]. Gre za referenčni vrednosti brez fizikalnega pomena. Služita nam za izravnavo gostot elektronov in vrzeli z zunanjim potencialom. Modificirani Boltzmannovi relaciji postaneta:

$$\boxed{n = n_i e^{\varphi_n - \psi} \quad (4.4)}$$

$$\boxed{p = n_i e^{\psi - \varphi_p} \quad (4.5)}$$

Brezdimenzijski potenciali so v enotah termične napetosti:

$$V_t = \frac{k_B T}{e_0}, \quad \sim 0.026V \quad T = 300K \quad (4.6)$$

zato predčlenov v eksponentu nismo zapisali.

Z zvezama (4.4) in (4.5) lahko količine iz enačb (4.1), (4.2) in (4.3) zapišemo s tremi spremenljivkami - kvazipotencialom ψ in obema kvazifermijevima nivojema φ_n in φ_p . Tri diferencialne enačbe je težko reševati hkrati. Že sama Poissonova enačba je močno nestabilna. Zato si razdelimo delo. Najprej rešimo samo Poissonovo enačbo pri konstatnih kvazifermijevih nivojih. Nato rešujemo še kontinuitetni enačbi, vendar pa držimo takrat kvazipotencial konstanten. Tako se počasi bližamo pravi rešitvi.

Na mestu je premislek o dobrem začetnem približku. Sicer slab približek popolnoma osiromašenih plasti nam lahko dobro služi. Le sega naj od roba do roba polprevodnika. Tako bo $\varphi_p - \varphi_n = V$, zunanji napetosti povsod, razen na robu, kjer preideta oba kvazifermijeva nivoja v pravi Fermijev potencial. Začetni približek bomo nato popravili s kontinuitetno enačbo.

Računali bomo za p^+nn^+ diodo, kot smo jo opisali v 1. poglavju, torej bomo vzeli $\Delta N(x)$ iz enačbe (1.1). Nadaljevanje poglavja bo dalo vpogled v numerično shemo reševanja tako Poissonove enačbe (4.1) kot kontinuitetnih enačb (4.2) in (4.3).

Opozorilo! Poissonove enačbe se bomo lotili v termičnem ravnovesju. Takrat obstaja tudi smiselna rešitev v okviru popolnoma osiromašenih plasti. Vendar pa ni naš namen računati že izračunano, pač pa na preprostem primeru prikazati novo metodo, ki jo bomo kasneje uporabili pri neravnovesnih polprevodnikih. Gostota naboja, ki vstopa v enačbo (4.1), je odvisna od danih referenčnih vrednosti φ_n (4.4) in φ_p (4.5). Lahko si predstavljamo, da je to le malenkost drugače kot če računamo z enotnim Fermijevim potencialom in ga postavimo na 0:

$$\varphi_n = \varphi_p = \varphi = 0 \quad (4.7)$$

Mehanizmi za spreminjanje slednjih so namreč sestavni del enačb za tokove, ki pa jih v ravnovesju ni. Poissonova enačba pa je v termičnem ravnovesju enako zapletena kot v neravnovesju.

4.2 Poissonova enačba

Zelo važen za računanje je profil primesi (1.1). Difuzijo nosilcev iz plasti velikih koncentracij primesi $p^+ \rightarrow n$ in $n^+ \rightarrow n$ bo ustavilo negativno električno polje v diodi:

$$\nabla\psi \leq 0 \quad (4.8)$$

Zaradi nasprotnega električnega polja bodo lahko difundirali le delci iz področja tik ob meji plasti različnih koncentracij, bolj oddaljene pa bo polje ustavilo. Od roba polprevodnika proti stiku plasti visoke koncentracije s srednjo plastjo nizke koncentracije $n^+ - n$, $p^+ - n$ se bo zato na obeh straneh diode širilo področje nevtralnega polprevodnika, nevtralnost pa bo od nekod dalje zmotil primanjkljaj oddifundiranih nosilcev. V nevtralnem polprevodniku velja:

$$\nabla^2\psi = 0 \quad (4.9)$$

Ta pogoj velja od roba polprevodnika in ga lahko štejemo za robni pogoj. Zaradi (4.8) in negativnosti polja, bo $\psi(x=1) < \psi(x=0)$ in bo:

$$\psi(0) \geq \psi(x) \geq \psi(1) \quad (4.10)$$

Globino področja s primanjkljajem prostih nosilcev zaradi difuzije iz plasti visokih koncentracij p^+ , n^+ , $N_D^+ = N_A^+ = 10^{24}\text{m}^{-3}$ v srednjo plast nizke koncentracije primesi n , $N_D = 10^{18}\text{m}^{-3}$ v plasteh n^+ in p^+ ocenimo v približku popolnoma osiromašenih plasti na $x_{p^+} = x_{n^+} = 1.15 \text{ nm}$. To je mnogo manj od globine plasti visokih koncentracij $\xi a \sim 1 \mu\text{m}$:

$$x_{n^+} = x_{p^+} \ll \xi a, \quad (4.11)$$

zato bo na robu pogoj (4.9) vedno izpolnjen.

Na sliki 4.1 vidimo skicirana področja različnega predznaka drugega odvoda kvazipotenciala $\nabla^2 \psi$ v p^+nn^+ diodi. Pozitivni drugi odvod je označen s sivo, negativni z zeleno barvo. Meje so ravnovesne vrednosti potenciala. Ničli drugega odvoda kvazipotenciala ($\nabla^2 \psi = 0$) v robnih plasteh n^+ in p^+ sta tudi robna pogoja. Z robnimi pogoji lahko začnemo reševati enačbo.

4.2.1 Streljanje

Integrator je operator, ki nam v okviru natančnosti $\mathcal{O}(h^n)$, kjer je n red integratorja, h pa korak, premakne rešitev diferencialnih enačb za korak h po osi x . Streljanje je način reševanja diferencialnih enačb z integratorjem, ko imamo podane robne pogoje namesto željenih začetnih vrednosti. Več o metodi je zapisano v dodatku A.1. Za integrator je program rabil kar navaden rk4 [8], torej metodo Runge-Kutta 4. reda s stalnim korakom, tako da smo imeli 10000 izračunanih točk skozi detektor. Tudi pri relaksaciji je ohranil isti korak, desettisočinko celotnega polprevodnika.

Plasti na robu, p^+ in n^+ , imata milijonkrat večjo koncentracijo primesi kot srednja plast. V Poissonovo enačbo (4.1) vstopata kot funkcija $\Delta N(x)$. Na robu bo gostota večinskih prostih nosilcev enaka koncentraciji primesi (4.9). V tej plasti se bo v termičnem ravnovesju pojavilo majhno polje, ki bo ustavilo difuzijo nosilcev iz srednje plasti. Torej moramo dopustiti tudi tam v našem računu končno polje, torej končen odvod kvazipotenciala. Zaradi eksponentne odvisnosti gostote nosilcev od kvazipotenciala (4.4) in (4.5), bodo majhne spremembe slednjega močno spremenile drugi odvod. V polprevodniku p^+ bo v prvem približku:

$$\nabla^2 \psi \sim n_i e^{\psi - \varphi_p} - N_A^+ \quad (4.12)$$

Blizu roba je $\nabla^2 \psi \sim 0$, zato je $n_i e^{\psi - \varphi_p} \sim N_A^+$. Ob majhnem polju $\Theta = \nabla \psi$ bo sprememba:

$$\nabla^2 \psi(x+h) - \nabla^2 \psi(x) \sim (h\Theta)N_A^+ \quad (4.13)$$

Zgornjo enačbo lahko prepisemo za polje:

$$\nabla^2 \Theta \sim K\Theta \quad (4.14)$$

sni. Dva pogoja bosta tako natančno določila obe spremenljivki.

Zaradi nestabilnosti (4.13) pa ne moremo uporabiti tudi streljanja, opisanega v dodatku A.1. Zato moramo najti nek nadomestni kriterij. Poissonovo enačbo lahko zapišemo kot:

$$\nabla^2 \psi = f(\psi) + g(x) \quad (4.16)$$

Funkcija $f(\psi)$ je naraščajoča, kar se najlepše vidi iz njenega odvoda, upoštevajoč izraze za naboj $Q^{\text{deep}} = N_t P_t$ na eni pasti (3.11) in Boltzmannovi relaciji (4.4) in (4.5):

$$\frac{df}{d\psi} = n_i e^{\psi - \varphi_p} + n_i e^{\varphi_n - \psi} + N_t \frac{2e^{\varphi_n - \varphi_p} + c_n^t x_t e^{\varphi_n - \psi} + c_p^t e^{\psi - \varphi_p} / x_t}{(e^{\psi - \varphi_p} + e^{\varphi_n - \psi} + c_n^t x_t + c_p^t / x_t)^2} > 0 \quad (4.17)$$

Torej velja ekvivalenca:

$$\psi_1(x) > \psi_2(x) \iff \nabla^2 \psi_1(x) > \nabla^2 \psi_2(x), \quad (4.18)$$

za vsak x . Označimo dve funkciji, ki se sekata v točki x_0 pri vrednosti ψ_0 z vrednostma njunih odvodov:

$$\nabla \psi_{s_1}(x_0) = s_1 \quad \nabla \psi_{s_2}(x_0) = s_2 \quad (4.19)$$

Potem nam (4.18) pravzaprav zahteva [9]:

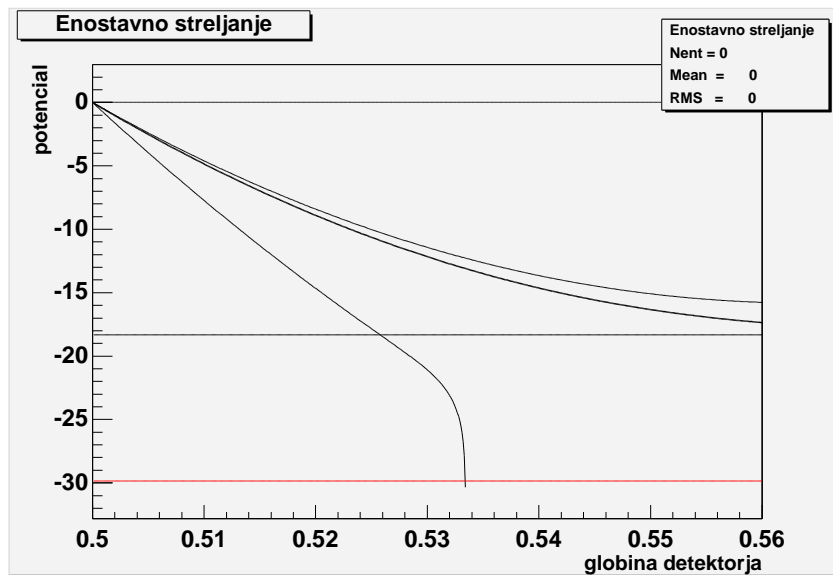
$$\psi_{s_1}(x) > \psi_{s_2}(x) \iff s_1 > s_2 \quad x > x_0 \quad (4.20)$$

$$\psi_{s_1}(x) < \psi_{s_2}(x) \iff s_1 > s_2 \quad x < x_0 \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

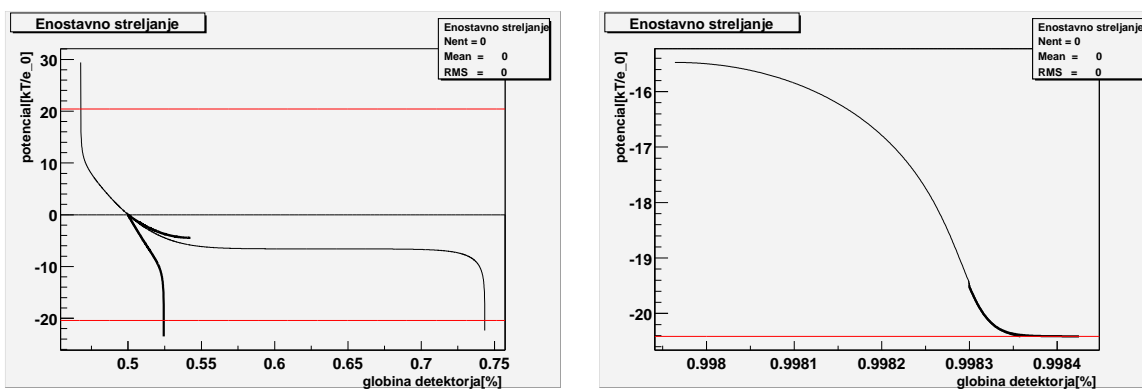
Z začetno točko x_0 razrežemo polprevodnik v dva neodvsina dela. Pri x_0 postavimo poskusni kvazipotencial ψ_0 . Levi del ima tako robna pogoja $\psi(0)$ pri $x = 0$ in ψ_0 pri $x = x_0$, desni pa ψ_0 pri $x = x_0$ in $\psi(1)$ pri $x = 1$. Pri vsakem potencialu ψ_0 bomo lahko v vsakem delu našli rešitev enačbe (4.1), saj gre za nek realen elektrostatičen problem. Naj bosta odvoda teh pravih rešitev v točki x_0 v levem delu s_l in v desnem delu s_d . Ko bosta odvoda enaka, $s_d = s_l$, smo našli pravo rešitev celotne diode.

Vsaka rešitev z odvodom s po absolutni vrednosti večjim od pravega s_d seka robni pogoj $\psi(1)$ pred robom diode in krši (4.10). Take rešitve imenujemo “zgoranje”. Vsaka rešitev s premajhnim odvodom po absolutni vrednosti ne doseže ravnovesne vrednosti kvazipotenciala ($\nabla^2 \psi = 0$). V bližini ravnovesne vrednosti bo sledila razvoju (4.13), zato bo ustrezala tudi rešitvi (4.15). Prava rešitev bi imela $B = -A$, rešitvam s premajhnim odvodom pa $B > -A$ spremeni predznak odvoda. Takrat kršimo (4.8). Take rešitve imenujemo “spodnje rešitve”. Prava rešitev vedno leži med “spodnjo” in “zgoranje” rešitvijo. Na sliki 4.2 je primer strelav v desno. S tanko črto sta prikazana primera “zgoranje” in “spodnje” rešitve. Ker so odvodi negativni, je “zgoranje” rešitev pod “spodnjo”.



Slika 4.2: Primer "zgornje", "spodnje" in končna, odebeljena rešitev za odvod pri danem kvazipotencialu, strel na desno, p^+nn^+ dioda v termičnem ravnovesju. "Zgornja" rešitev je nižja od "spodnje", ker so odvodi negativni.

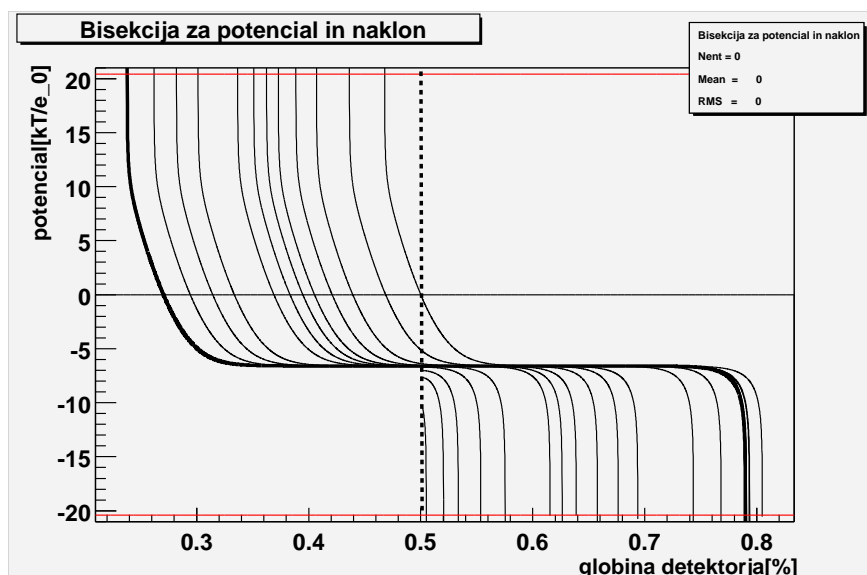
Kriterija (4.8) in (4.10) sta zato ekvivalentna kriterijev za dober strel. Z razpolavljanjem vrednosti odvoda kvazipotenciala "zgornjih" in "spodnjih" rešitev v začetni točki se pravemu odvodu približamo v okviru natančnosti računalnika. Izračunamo ga le na desni strani s_d začetne točke pri poskusni vrednosti kvazipotenciala ψ . Na sliki 4.2 je odebeljena prikazana tudi najboljša rešitev ψ_{s_d} v okviru natančnosti računalnika.



Slika 4.3: Oba izida pri strelu kvazipotenciala s pravim desnim odvodom na levo, p^+nn^+ dioda v termičnem ravnovesju. Na osi x je relativna globina, na osi y kvazipotencial v termični napetosti. Na desni sliki ($x_0 = 0.9983$) je odvod s_d manjši od pravega s_l , zato končamo z ničlo odvoda na levi. Pravi kvazipotencial je večji. Na levi sliki ($x_0 = 0.5$) je $s_l < s_d$. Kvazipotencial moramo zmanjšati. Dodana sta primera "zgornje" oziroma "spodnje" rešitve pri strelu na desno.

ψ_0 bo prava vrednost kvazipotenciala v začetni točki x_0 , ko bo optimalen levi odvod s_l enak desnemu s_d . Že en strel na levo s s_d je dovolj da prepoznamo velikostno relacijo med s_l in s_d . Za $s_l < s_d$ bo pravi kvazipotencial $\psi(x = x_0)$ manjši od trenutnega kvazipotenciala ψ_0 . Podobno bo za $s_l > s_d$ pravi potencial $\psi(x = x_0)$ nad našo trenutno vrednostjo ψ_0 . Z bisekcijo med rešitvami nad in pod pravo vrednostjo določimo optimalno vrednost potenciala $\psi(x = x_0)$.

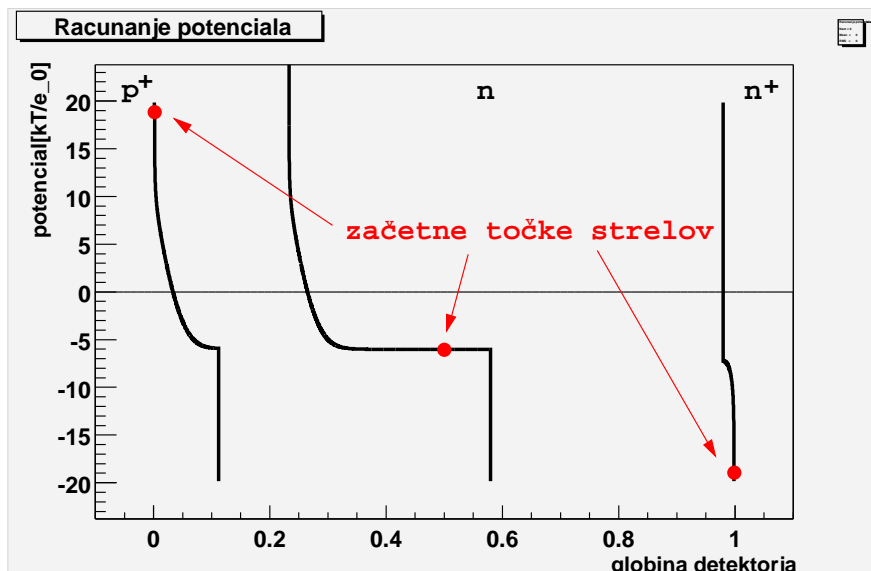
Na sliki 4.3 sta prikazana oba možna izida pri strelu na levo. Premajhen odvod $s_d < s_l$ (desni graf) se bo končal z ničlo kvazipotenciala pred robom in bo kršil pogoj (4.8). Prevelik odvod $s_d > s_l$ (levi graf) pa bo kvazipotencial odpeljal preko $\psi(1)$ in bo kršil pogoj (4.10). Slika 4.4 pa kaže bisekcijo po vrednostih kvazipotenciala v začetni točki. Prva točka je na sredini med $\psi(0)$ in $\psi(1)$, nato pa drobimo pravi interval.



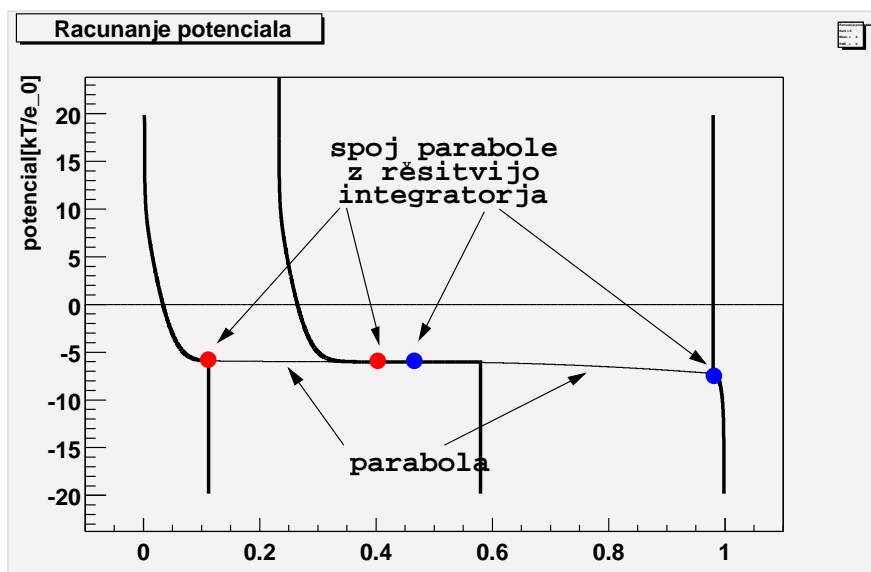
Slika 4.4: Rešitve kvazipotenciala na desno in ustrezni streli na levo pri različnih vrednostih ψ v začetni točki strelav na sredi detektorja v ravnovesni p^+n^+ diodi. Os x je izrez detektorja okrog sredine s podano relativno globino. Na črtkani črti delamo bisekcijo; končni rezultat je odebeljen.

Streljanje lahko ponovimo v poljubno mnogo točkah polprevodnika, a je to malce zamudno. Recimo da to storimo v treh točkah - na obeh stikih polprevodnikov različnih koncentracij in vrst primesi ter v sredini. Tri nastale krivulje nato povežemo v sklenjeno rešitev - slika 4.6. To storimo s prilagajanjem parabole. Poskušamo jo pripeti na par točk z različnih krivulj, tako da bo razlika v vrednostih in razlika v odvodih kar se da majhna. Skupna rešitev, torej unija rešitev integratorja in vmesnih parabol, je približek rešitve polprevodnika.

Streljanja zaradi nestabilnosti (4.15) nikoli ne končamo na robu. To se sklada z začetno predpostavko o majhni vdorni globini polja v plasteh visoke koncentracije. Tako je nastavek nevtralnega polprevodnika na robu upravičen.



Slika 4.5: Streli kvazipotenciala iz $x = \xi$, $x = 1 - \xi$ in $x = 0.5$ v ravnovesni p^+nn^+ diodi. Rešitve nimajo skupnih točk.



Slika 4.6: Strele kvazipotenciala spojimo s parabolama. Ravnovesna p^+nn^+ dioda. Prva parabola je spojena v rdečih točkah, druga v modrih. Skupaj je to smiselni vhod relaksacije.

4.2.2 Relaksacija

Z relaksacijo (glej dodatek A.2) popravimo rezultate streljanja. Najbolj nas motijo ravno stiki umetnih parabol (rešitev v približku popolnoma osiromašenega detektorja) z rešitvami streljanja. To lepo kaže slika 4.7.

Relaksacijska metoda presentljivo dobro konvergira. Natančnost na 8 mest doseže

4.3 Kontinuitetni enačbi

S kontinuitetno enačbo zares opišemo neravnovesni polprevodnik. Tako nam neravnovesnost doda še dve diferencialni enačbi, ki jih moramo rešiti. Tudi kontinuitetni enačbi bomo zapisali s kvazipotenciali. Torej si oglejmo robne pogoje kvazifermijskih potencialov. Ti morajo na robu preiti v enoten Fermijev nivo, ki ga spreminja zunanji potencial. Ker gledamo elektronske nivoje, bo negativni potencial večal Fermijev potencial. Ko bomo torej p stran diode priključili na negativno (zaporno) napetost, bomo zvišali Fermijevo energijo. Dogovorimo se, da se bomo ukvarjali samo z zapornimi napetostmi. Njeno velikost v enotah termične napetosti označimo z V . Izberimo si ničlo Fermijevega potenciala pri $x = a$. Potem bosta tam kvazifermijska potenciala enaka:

$$\varphi_n(x = a) = \varphi_p(x = a) = 0 \quad (4.23)$$

Na drugi strani bomo vzdrževali negativno napetost:

$$\varphi_n(x = 0) = \varphi_p(x = 0) = -(-V) = V \quad (4.24)$$

Poleg robnih pogojev rabimo tudi enačbo v brezdimenzijski obliki. Dimenzijo polprevodnika $a = 300\mu\text{m}$ bomo spremenili v enoto, enota za merjeneje dolžine bo torej a . Uporabimo še termično napetost (4.6) za merjenje kvazipotencialov in Boltzmannovi zvezi (4.4) in (4.5), da sestavimo enoto za električni tok:

$$J_0 = e_0 I_0 = \frac{e_0 \mu_p n_i V_T}{a} \sim 15.6 \frac{\text{mA}}{\text{m}^2} \quad (4.25)$$

Podobno lahko predelamo generacijo in rekombinacijo (3.13):

$$U_t = U_t^0 \frac{1 - e^{\varphi_n - \varphi_p}}{e^{\varphi_n - \psi} + \theta_t e^{\psi - \varphi_p} + \theta_t / x_t + x_t} \quad (4.26)$$

$$U_t^0 = N_t c_p^t n_i \quad (4.27)$$

$$\theta_t = \frac{c_p^t}{c_n^t} \sim 7.071 \quad (4.28)$$

To zdaj vstavimo v diferencialni enačbi (4.2) in (4.3), da dobimo

$$\nabla^2 \varphi_n + \nabla \varphi_n (\nabla \varphi_n - \nabla \psi) = -e^{\psi - \varphi_n} \frac{1}{b} \sum_t \beta_t U_t(x) \quad (4.29)$$

$$\nabla^2 \varphi_p - \nabla \varphi_p (\nabla \varphi_p - \nabla \psi) = e^{\varphi_p - \psi} \sum_t \beta_t U_t(x) \quad (4.30)$$

$$\beta_t = \frac{U_t^0 a}{I_0} = \frac{N_t c_p^t a^2}{\mu_p V_T} \sim 0.13 \frac{N_t}{10^{18} \text{m}^{-3}} \quad (4.31)$$

$$b = \frac{\mu_n}{\mu_p} \sim 3.3 \quad (4.32)$$

Motijo nas prvi odvodi v enačbi, zato se ju lotimo na drugačen način kot Poissonove. Najprej spremenimo diferencialno enačbo v integralsko [10] in dobimo približno rešitev, nato pa rešitev izboljšamo z relaksacijo.

4.3.1 Integriranje

Izračunajmo najprej generacijsko-rekombinacijski tok v polprevodniku. Brezdimenzijski $U(x) = \sum_t \beta_t U_t(x)$ moramo integrirati:

$$I_{GR}(x) = \int_0^x U(y) dy, \quad (4.33)$$

Pri integraciji (4.2) dobimo poleg integrala še konstanto, zato bo celoten brezdimenzijski tok (2.37):

$$I_n^0 - I_{GR}(x) = e^{-\psi} \nabla e^{\varphi_n} \quad (4.34)$$

V eksponent stlačimo $\varphi_n(0)$ (4.23), da omejimo vrednosti integranda. Integriramo raje z desne, saj je kvazipotencial na desni bolj negativen kot na levi in bodo prispevki tam manjši. Natančneje je namreč seštevati majhne količine kot velikim količinam dodajati majhne popravke:

$$F_n(x) = \int_x^1 e^{\psi(y) - \varphi_n(0)} dy \quad (4.35)$$

$$FR_n(x) = \int_x^1 I_{GR}(y) e^{\psi(y) - \varphi_n(0)} dy \quad (4.36)$$

Tako preprosto določimo vrednost kvazifermijskega potenciala za elektrone:

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \ln \left[e^{\varphi_n(1) - \varphi_n(0)} + FR_n(x) - I_n^0 F_n(x) \right] \quad (4.37)$$

Pri računanju nivoja za vrzeli se situacija spremeni, saj pomožni funkciji:

$$F_p(x) = \int_0^x e^{\varphi_p(1) - \psi(y)} dy \quad (4.38)$$

$$FR_p(x) = \int_0^x I_{GR}(y) e^{\varphi_p(1) - \psi(y)} dy \quad (4.39)$$

močneje naraščata blizu desnega roba, ko je ψ manjši kot na levem robu. Spet smo prideli dobro definirano referenco $\varphi_p(1)$ (4.24), ki omeji razmah integranda.

Kvazifermijska nivoja elektronov in vrzeli imata podobni enačbi, vendar moramo biti pozorni na drugačne predznake:

$$\varphi_p(x) = \varphi_p(1) - \ln \left[e^{\varphi_p(1) - \varphi_p(0)} - FR_p(x) - I_p^0 F_p(x) \right] \quad (4.40)$$

Prosti konstanti določimo iz robnih pogojev (4.23), (4.24):

$$I_n^0 = \frac{FR_n(0) + e^{-V} - 1}{F_n(0)} \quad (4.41)$$

$$I_p^0 = \frac{-FR_p(1) + e^{-V} - 1}{F_p(1)} \quad (4.42)$$

Eksponentno odvisnost toka od napetosti nam lahko prekrije generacijsko - rekombinacijski člen $FR_n(0)$, v katerem je prav tako skrita odvisnost od zunanje napetosti.

Z enačbami (4.37) in (4.40) smo torej problem rešili! No, skoraj res. Pozabili smo, da se v $U(x)$ skriva odvisnost od kvazifermijevih nivojev. Ta odvisnost, razvidna iz (3.13) in (4.26) je še mnogo bolj zapletena kot eksponentna odvisnost v Poissonovi enačbi. Spet bomo reševali iterativno. Najprej privzemimo približek popolnoma osiromašenih plasti, torej $\varphi_p - \varphi_n = V$. S tem približkom lahko izračunamo $U(x)$, z njim pa nove vrednosti obeh nivojev. To naj bo približna rešitev, ki jo bo popravila relaksacija.

4.3.2 Relaksacija

Relaksacija poteka pri kontinuitetnih enačbah povsem enako kot pri Poissonovi enačbi. Vrnemo se k enačbama (4.29) in (4.30). Pozorni moramo biti na prve odvode. K sreči so tudi ti odvisni le od sosednjih vrednosti, $dy/dx \sim (y_{k+1} - y_{k-1})/2h$, tako da je matrika še vedno tridiagonalna in zato hitro rešljiva. Metoda dobro konvergira in ne porabi več kot treh korakov za zahtevano natančnost 8 mest. Ker smo blizu prave rešitve, nas tudi zapletene zveze med kvazifermijevimi nivoji in generacijo in rekombinacijo ne motijo več.

V tem poglavju smo določili enačbe, ki jih rešujemo, in numerične metode, ki so jih rešile. Rezultate pa si bomo ogledali v nadaljnji razpravi.

4.4 Iteracija

Zdaj znamo rešiti tako Poissonovo enačbo kot kontinuitetni enačbi zase. Skupaj pa jih bomo reševali iterativno. Sledil bo opis tega postopka. Kot smo že povedali, vzamemo za začetni približek kvazifermijeva nivoja v okviru popolnoma osiromašenih plasti, torej:

$$\varphi_p(x) - \varphi_n(x) = V \quad x \neq 0, 1 \quad (4.43)$$

$$\varphi_p(0) = \varphi_n(0) = V \quad (4.44)$$

$$\varphi_p(1) = \varphi_n(1) = 0 \quad (4.45)$$

Nato rešimo Poissonovo enačbo, kot opisano v razdelku 4.2. Ta nam da funkcijo $\psi(x)$. To funkcijo uporabimo za določitev $U(x)$ v kontinuitetnih enačbah, skupaj z začetnim približkom za $\varphi_n(x)$ in $\varphi_p(x)$. Z relaksacijo dobimo nove vrednosti kvazifermijevih potencialov $\varphi_p(x)$ in $\varphi_n(x)$. Z njimi spet rešimo Poissonovo enačbo. Dovolj je relaksacija, saj je stara rešitev dovolj blizu prave rešitve. Popravljeno rešitev za kvazipotencial $\psi(x)$ vnesemo v relaksacijsko shemo kontinuitetnih enačb in popravimo kvazifermijeva potenciala $\varphi_n(x)$ in $\varphi_p(x)$.

Zadnja dva koraka, relaksacijo Poissonove enačbe in relaksacijo kontinuitetnih enačb nato ponavljamo toliko časa, dokler nam premiki ne dosežejo meje natančnosti 8 mest. Za to ponavadi ne rabimo več kot dve iteraciji postopka.

Poglavje 5

Rezultati in meritve

5.1 Uvod

Smisel teoretičnih računov je v pravilnem opisu realnega stanja. Tega nam kažejo preprosti poskusi z detektorji. Poskusi se opravljajo na Institutu Jožef Stefan, na Odseku za eksperimentalno fiziko delcev. Številni viri navajajo dejanski potek eksperimentov, medtem ko nas bolj zanimajo sami rezultati. Vseeno moramo vsaj razumeti osnove meritev, zato jim bomo namenili del tega poglavja. Sledila pa bo običajna primerjava računskih napovedi z izmerjenimi rezultati.

5.2 Meritev

Od vseh preizkusov detektorjev so za nas najbolj zanimivi tisti, ki tipajo električno polje. Znano je, da gibajoč naboj vpliva na elektrone na oddaljeni kovini. V detektorju je električno polje, ki naboje pospešuje. Torej moramo le vbrizgati nosilce naboja, pa bomo merili na kovinskih elektrodah vplive električnega polja.

Elektroni v kovini se namreč prerazporedijo, saj mora površina kovine ostati ekvipotencialna ploskev. Elektroda mora v detektorju vzdrževati stalno napetost, zato mora biti povezana z rezervoarjem elektronov. Pri gibanju elektrona v medelektrodnem prostoru mora elektroda z rezervoarjem izmenjati sunek toka. Ta sunek toka je povezan s trenutno hitrostjo nosilca naboja po Ramovem teoremu (glej dodatek B) kot:

$$I = -\frac{q}{d}v, \quad (5.1)$$

kjer je q naboj nosilca, v njegova hitrost in d oddaljenost elektrode od prve točke z ničelnim električnim poljem. Uporabimo Drudovo zvezo [6] med hitrostjo in električnim poljem kot definicijo mobilnosti, ki je v polprevodnikih dobro definirana količina, pa imamo:

$$I = -\mu \frac{d}{a} \Theta, \quad (5.2)$$

kjer je μ mobilnost nosilca naboja in Θ električno polje. Torej nismo napovedali preveč. Oblika sunka je dokaj preprosto povezana z obliko električnega polja.

Vir nosilcev naboja je tudi na dlani. Sevanje vzbuja nastajanje parov elektron-vrzel. To sevanje mora biti energetsko dovolj bogato, da lahko vezani nosilci preskočijo energijsko špranjo. S tem nastanejo nosilci naboja, pari elektron-vrzel, v ustreznih pasovih. Zaradi izgub pri prehodu je potrebna energija nekaj eV. Torej moramo uporabiti vsaj žarke v bližnjem IR spektru, delovala bodo pa bodo tudi vsa sevanja višjih energij, ki jih pričakujemo tudi pri pravem merjenju z našim detektorjem. Pri sevanjih z majhno vdorno globino v siliciju bomo nastale pare lahko lokalizirali, medtem ko bodo sevanja znatnih vdornih globin tvorila pare enakomerno po vsem volumnu. Prvi se bodo gibali skoraj vsi povsem enako, zato bo signal relativno čist, kar si tudi želimo. Svetloba ima majhno vdorno globino v siliciju in je zato dober vir nosilcev nabojev. Pare tvorimo tako, da z laserskimi pulzi svetimo na površino detektorja.

V običajnih p^+nn^+ diodah je prednja p^+ stran v stiku s negativno nabito elektrodo zadnja n^+ stran pa v stiku s pozitivno nabito elektrodo. Elektroni se bodo vedno bližali pozitivno nabiti elektrodi, medtem ko se bodo vrzeli vedno gibale proti negativno nabiti elektrodi. Če bomo vbrizgali pare na sprednjo stran, bomo imeli le gibajoče elektrone, saj bodo vrzeli ostale na robu, medtem ko bomo pri vbrizgih na zadnjo stran dobili le gibajoče se vrzeli. Signal je posledica gibajočih se delcev. Gibanje nosilcev obeh vrst bo v linearnem polju s časom eksponentno, s časovno konstanto τ (primerjaj dodatek B):

$$\tau = \frac{d}{\mu \Theta_0} \quad (5.3)$$

Z d smo označili globino osiromašene plasti in z Θ_0 električno polje v maksimumu. Krivulje z večjo začetno strmino torej kažejo na večja začetna polja, eksponentna oblika pa je znak linearnega polja.

Torej lahko primerjamo slike tokovnih sunkov in slike električnega polja, da dobimo vsaj kvalitativno primerjavo. Opisi parametrov pasti (tabela 5.1) so bolj zapisi redov velikosti kot natančne količine [5], zato dlje ne moremo. Še opozorilo. Pri računalniških simulacijah je višina nivoja pasti postavljena za 0.05 eV nad E_i . Tega nivoja sicer niso izmerili, je pa zelo prikladen, saj so vplivi zaradi bližine sredine pasu dobro vidni.

5.3 Električno polje

Električno polje uravnava gibanje nabitih delcev po snovi, zato bo njegova slika naš glavni rezultat. Sevalne poškodbe bomo simulirali kot naraščajočo gostoto globokih

Tabela 5.1: Parametri pasti, uporabljeni pri računalniški simulaciji električnega polja v polprevodniku. Večina parametrov je do reda napake podobna izmerjenim, z izjemo višine nivoja. Velika bližina E_i namreč poveča opaznost vplivov globokih nivojev.

Parameter	simbol	vrednost
višina nivoja	E_t	$E_i + 0.05\text{eV}$
preseki za zajetje vrzeli	σ_p	10^{-19} m^2
preseki za zajetje elektrona	σ_n	$0.35 \times 10^{-19} \text{ m}^2$
tip pasti		akceptor

nivojev v snovi. Tako bomo lahko uživali ob slikah električnega polja pri različnih napetostih, temperaturah in sevalnih dozah. Ostali parametri so navedeni v tabelah 5.1 in 2.1.

5.3.1 Sprememba tipa polprevodnika

Akceptorske pasti nam v dovolj obsevanem detektorju spremenijo statičen naboj. Kjer je prej prevladoval pozitiven statičen naboj ioniziranih donorjev, zdaj občutimo negativni naboj ujetih elektronov na pasteh. Naklon električnega polja je merilo električnega naboja¹. Prosti nosilci ne morejo izravnati statičnega naboja ioniziranih pasti, zato naklon električnega polja v obsevani diodi spremeni predznak. To nam prikazuje slika 5.4.

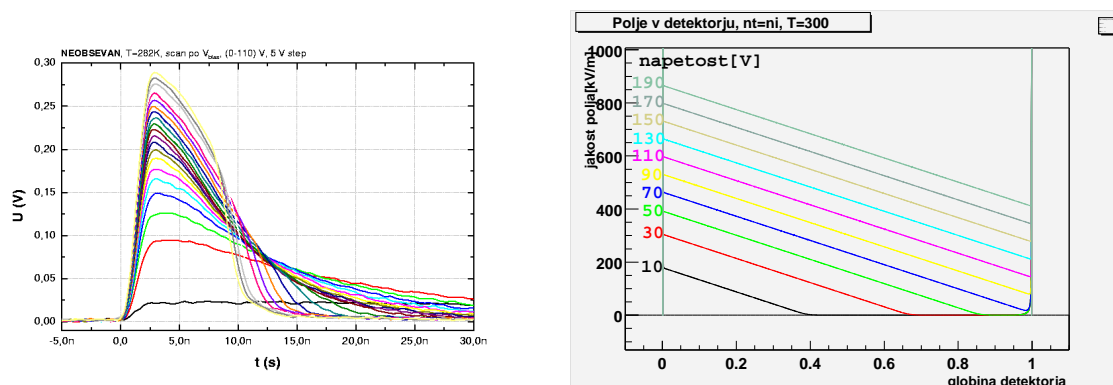
Kvalitativno lahko slike primerjamo s signali svetlobno vzbujenih elektronov na prednji strani detektorja (slike 5.1, 5.2 in 5.3). Leve slike, izmerjeni signali, so eksponentne krivulje časa (glej dodatek B) z maksimumom signala pri največji vrednosti polja. Vidimo, da je ta za neobsevano diodo na začetku detektorja - slika 5.1, za obsevano pa se premakne na konec detektorja - slika 5.3. Na sliki 5.3 je lega maksimuma odvisna od napetosti, saj porabijo delci v večjem električnem polju (2.30) manj časa za pot skozi detektor. Naši izračuni potrjujejo premik maksimalnega polja.

Ker bi enako polje kot v obsevani p^+nn^+ diodi dobili v diodi tipa p^+pn^+ , govorimo o spremembi tipa polprevodnika. Ker ne gre za dejansko spremembo diode, pač pa za dinamične spremembe zaradi neravnovesnosti in sevalnih poškodb silicija, govorimo o učinkovitem tipu polprevodnika.

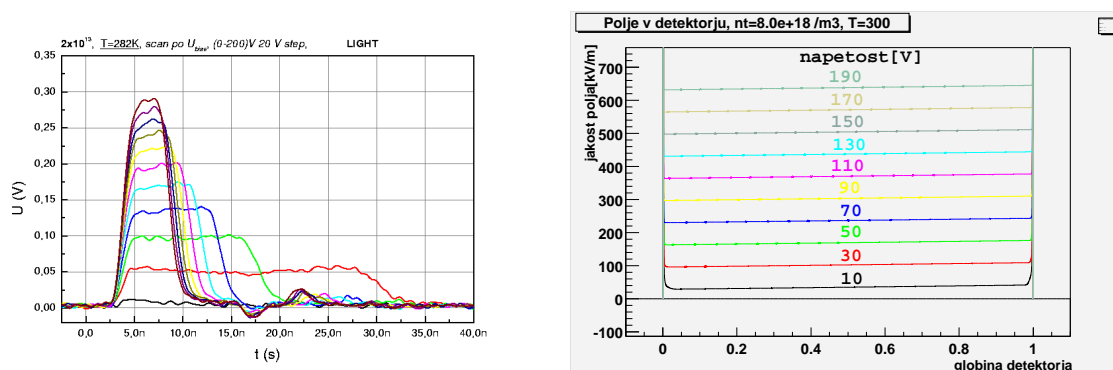
5.3.2 Sprememba tipa pri ohlajanju

Nizka temperatura zamrzne elektrone na globokih nivojih. Zmanjša se namreč člen $k_B T$, zato je verjetnost za prehod med stanji znatno manjša, saj je zvezana z eksponentom $e^{-E/k_B T}$. Zato pričakujemo manjšo aktivnost pasti kar bo naredilo obsevane

¹Gaussov izrek



Slika 5.1: Signali svetlobno vzbujenih elektronov v neobsevani p^+nn^+ diodi pri zapornih napetostih od 0 do 110 V v korakih po 5 V in temperaturi 282 K (levo [11]) in slike električnega polja v enaki diodi pri napetostih od 10 do 190 V, gostoti pasti enaki gostoti lastnih nosilcev ($N_t = n_i$) in temperaturi 300 K. Simulirano polje je narisano pozitivno za lažjo primerjavo slik.

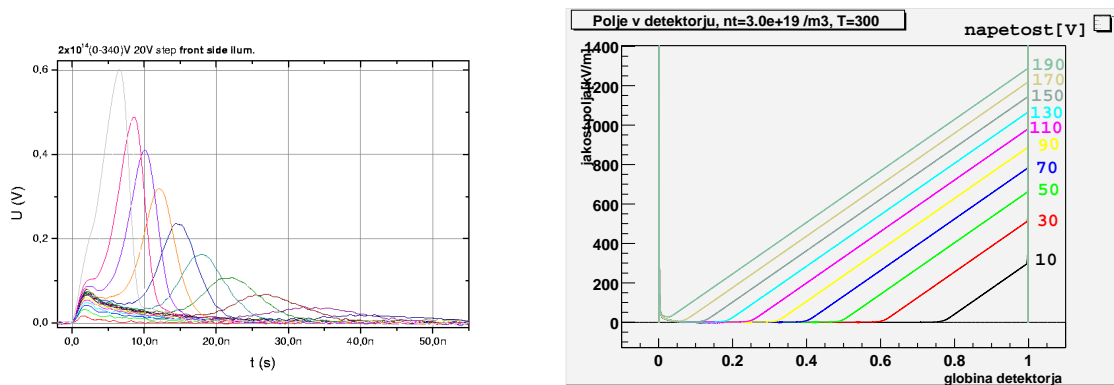


Slika 5.2: Signali svetlobno vzbujenih elektronov v p^+nn^+ diodi obsevani s fluenco $2 \times 10^{13} \text{cm}^{-2}$ pri zapornih napetostih od 0 do 200 V v korakih po 20 V in temperaturi 282 K (levo, [11]) in slike simuliranega električnega polja v enaki diodi pri napetostih od 10 do 190 V, gostoti pasti $N_t = 8 \times 10^{18} \text{m}^{-3}$ in temperaturi 300 K. Simulirano polje je narisano pozitivno za lažjo primerjavo. V tako obsevani diodi izravna naboj pozitivno ioniziranih donorskih primesi negativni naboj elektronov ujetih na pasteh.

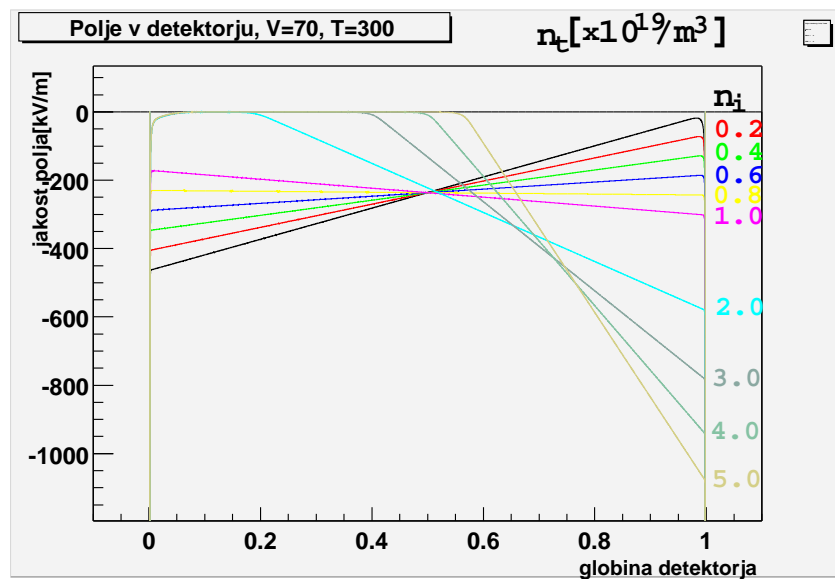
detektorje podobne neobsevanim. To nam kaže slika 5.6, ki primerja električno polje v polprevodniku z enako gostoto globokih nivojev pri različnih temperaturah.

Z besedo stik smo po analogiji s približkom popolnoma osiromašenih plasti označili točko, kjer je vrednost polja največja. Ta točka je v hladni obsevani diodi podobno kot v neobsevani (primerjaj sliko 5.1) pri $x = \xi$. Pri sobni temperaturi se stik premakne na nasprotno stran detektorja, kot na sliki 5.3. Spremembo tipa polprevodnika pri ohlajanju so opazili pri signalih svetlobno vzbujenih nosilcev. Na sliki 5.6 so to vrzeli, ki vstopajo na zadnji strani detektorja. Tako je horizontalna skala pravzaprav zrcaljena². Pri visokih temperaturah (zgornje krivulje) je maksi-

²Primerjaj sliko B.2



Slika 5.3: Signali svetlobno vzbujenih elektronov v p^+nn^+ diodi obsevani s fluenco $2 \times 10^{14} \text{cm}^{-2}$ pri napetostih od 0 do 340 V v korakih po 20 V in temperaturi 282 K (levo, [11]) in slike simuliranega električnega polja v enaki diodi pri napetostih do 190 V, gostoti pasti $N_t = 3 \times 10^{19} \text{m}^{-3}$ in temperaturi 300 K. Simulirano polje je pozitivno za lažjo primerjavo. Maksimum polja je zdaj na desnem robu diode.



Slika 5.4: Slike simuliranih električnih polj v p^+nn^+ diodi pri napetosti 70 V in temperaturi 300 K. Spreminjamo gostoto pasti od 0.2 do $5.0 \times 10^{19} \text{m}^{-3}$. Zveza med sevalno dozo, fluenco in gostoto pasti je linearna. Naraščajoče sevalne doze večajo negativni naboj ujet na pasteh. Zato ima polje vedno bolj negativni naklon in maksimum polja se premakne na nasprotno stran diode.

mum signala takoj po vstopu vrzeli, torej na zadnji strani detektorja, in ga lahko primerjamo z rdečo krivuljo na sliki 5.6. Pri nizkih temperaturah se pojavi še stik na za vrzeli oddaljeni, sprednji strani detektorja. To pa je maksimum modre krivulje na sliki 5.6. Preveč preprost model z enim samim tipom pasti nam da obrat polja že pri 100 K višji temperaturi.

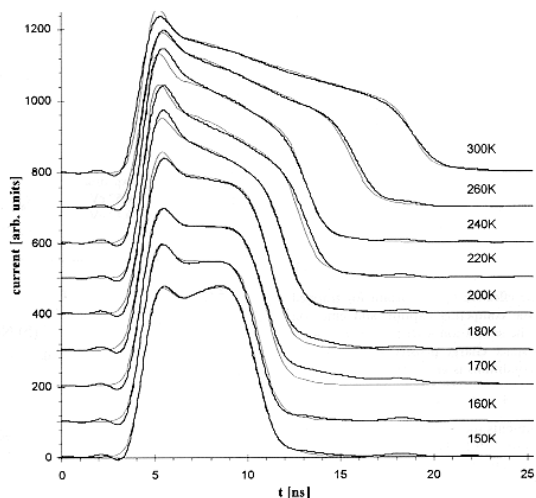
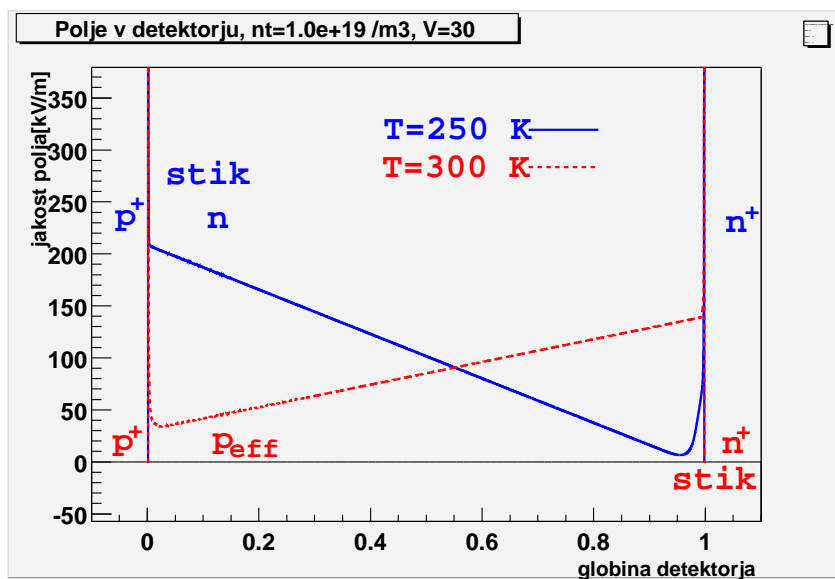


Fig. 1. Comparison of measured (thick lines) and simulated (thin lines) current transients as a function of temperature for n^+ illumination ($\Phi_{0e} = 3.4 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, $f = 100 \text{ Hz}$, $V_b = 150 \text{ V}$).

Slika 5.5: Signali vrzeli pri svetlobnem obsevanju zadnje strani p^+nn^+ diode pri napetosti 150 V in fluenci $3.4 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, pri temperaturah od 150 do 300 K [12])

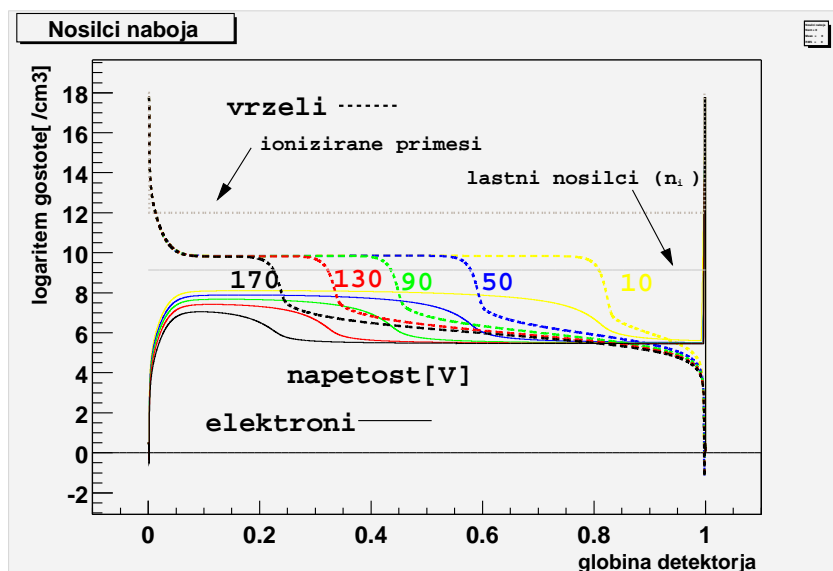


Slika 5.6: Simulirano električno polje v p^+nn^+ diodi pri napetosti 30 V, gostoti pasti $N_t = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ in temperaturi 250 K (modro, sklenjeno) oziroma 300 K (rdeče, črtkano). Stik je drugo ime za maksimum električnega polja, v tej točki pa sta navadno staknjeni primesi različnih tipov (p in n). Označena je tudi efektivna sprememba predznaka ioniziranega naboja v srednji plasti detektorja.

5.3.3 Gostota nosilcev naboja

Tudi gostota nosilcev se spreminja vzdolž polprevodnika. Z večanjem napetosti lahko večamo osiromašeni del polprevodnikov, kar nam kaže slika 5.7. Sredi detek-

torja so gostote nosilcev mnogo majše od statičnega naboja ioniziranih primesi 10^{12}cm^{-3} , zato nam slednji uravnava naklon električnega polja. Produkt pn je manjši od ravnovesnega n_i^2 . Levo od roba pri $x = 1$ se širi plast z malo delci. V približku popolnoma osiromašenih plasti bi ji rekli osiromašena plast. Razlike so res ogromne, med to plastjo in bogatima plastema na robu kar 10^{12} !



Slika 5.7: Slika logaritmov gostot prevodnih elektronov in vrzeli v p^+nn^+ diodi pri gostoti pasti $N_t = 4 \times 10^{19}\text{m}^{-3}$ in temperaturi 300 K. Z naraščajočo napetostjo raste plast z malo naboji od desne.

5.4 Dvojni stik

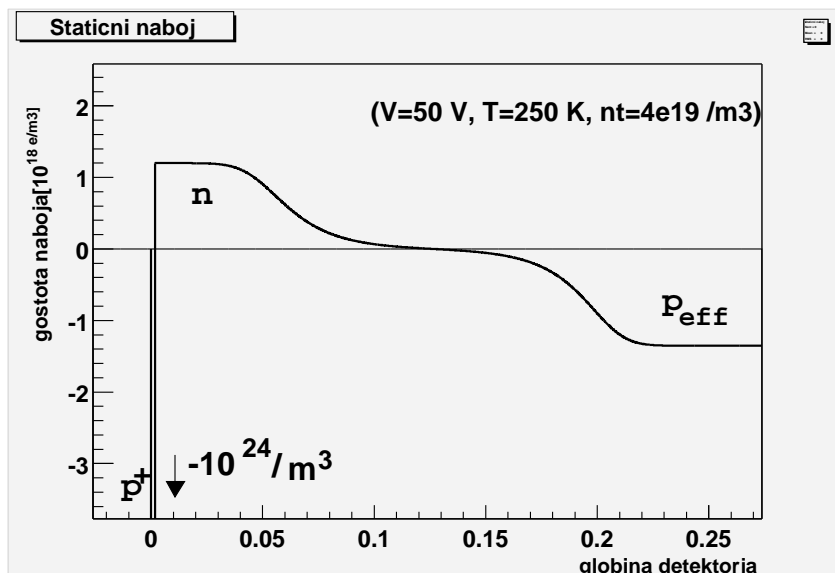
Signali na sliki 5.3 imajo dva maksimuma električnega polja. Ker smo o maskimih v približku popolnoma osiromašenih plasti dobimo na stikih primesih različnih tipov, gre za diode z dvojnimi stikom.

Slika 5.8 nam kaže vsoto naboja ioniziranih primesi in statičnega naboja, ujetega na globokih nivojih. Prvi je sredi detektorja pozitiven, slednji negativen. Vsota se spreminja po globini detektorja. S slike 5.10 se prepričamo, da je naboj prostih nosilcev mnogo manjši od statičnega naboja, zato nam naboj na sliki 5.8 uravnava naklon polja. Za pasti z višino nivoja blizu E_i je x_t (3.10) dovolj majhen, da lahko privzamemo odvisnost:

$$P_t \sim \frac{n}{p+n} \quad (5.4)$$

Ta nam da vedeti, da bodo v plasteh z veliko vrzelmi globoki nivoji prazni, oziroma polni vrzeli. Torej bo statičen naboj enak naboji ioniziranih primesi, ki je pozitiven.

Po analogiji s približkom popolnoma osiromašenih plasti je polprevodnik s pozitivnim statičnim nabojem tipa n . Vendar imamo tu več prostih vrzeli kot prostih elektronov, zato ta plast ni enaka n plasti polprevodnika v termičnem ravnovesju. Vmesna plast z nabojem ioniziranih primesi nastane zaradi vrzeli, ki difundirajo iz plasti p^+ in se ujamejo na pasti. Vzdlolž diode gostota elektronov narašča (slika 5.10), zato narašča tudi zasedenost akceptorskega nivoja P_t in zato tudi statičen negativni naboj $Q^{\text{deep}} = -N_t P_t$. Ker ne gre za prave akceptorske primesi, govorimo o polprevodniku tipa p_{eff} .



Slika 5.8: Vsota gostot ioniziranega naboja primesi in naboja ujetih elektronov na pasteh za p^+nn^+ diodo pri napetosti 50 V, temperaturi 250 K in gostoti pasti $N_t = 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, prva četrtina detektorja. Gostote prostih nosilcev so mnogo manjše - slika 5.10.

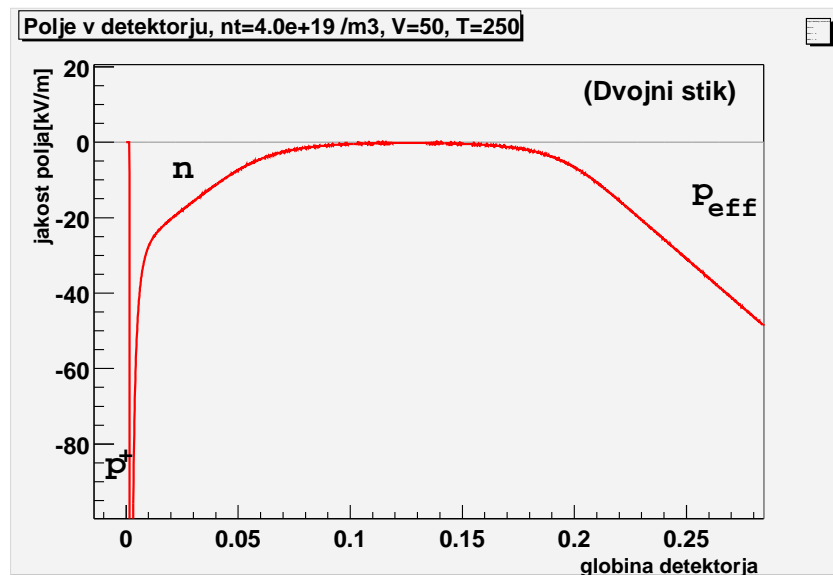
Stik p^+n ni stik v približku popolnoma osiromašenih plasti. Polje ustavi le vrzeli, ki polnijo pasti, v valenčnem pasu pa je vrzeli še dovolj, kot kaže slika 5.10. Področje okrog stika p^+n ni osiromašeno.

5.5 Temni tok

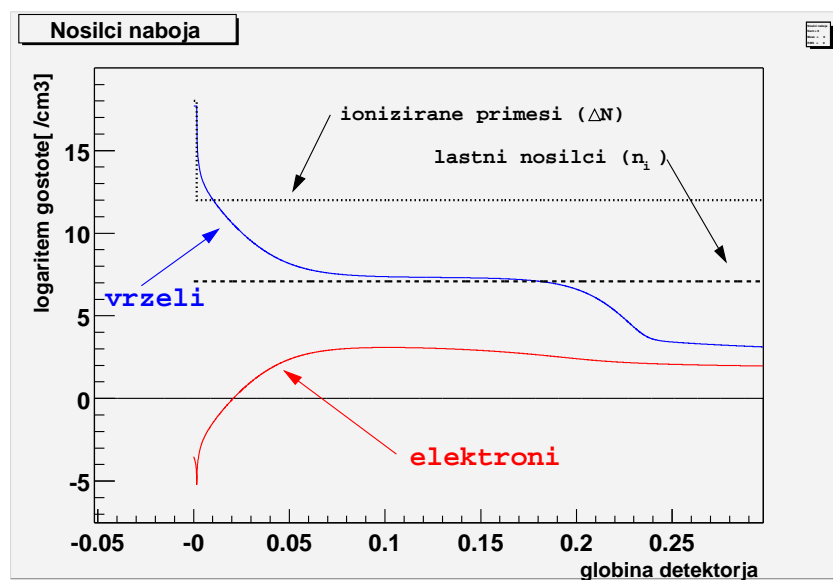
Skozi diodo pod negativno napetostjo (p -stran negativna) teče tok. Obliko krivulje, ki povezuje ta temni tok z napetostjo, lahko dobimo v preprostem približku. Tega bomo nato primerjali z dobljenimi slikami.

Dioda, priključena na zaporno napetost V , bo v približku prenašala tok (glej dodatek C):

$$I = I_D (e^{-\frac{e_0 V}{k_B T}} - 1) - I_{GR} \sqrt{\frac{V}{V_0}} \quad (5.5)$$



Slika 5.9: Simulirano električno polje v p^+nn^+ diodi, napetost je 50 V, gostota pasti $N_t = 4 \times 10^{19} \text{m}^{-3}$, temperatura 250 K, prva četrtina detektorja. Prvi maksimum polja je na sliki, drugi je na oddaljenem robu pri $x = 1$. Polje ima v diodi dve območji različnega odvoda, posledico različnega statičnega naboja v teh območjih - slika 5.8. Gostota prostih nosilcev je namreč mnogo majša - slika 5.10.

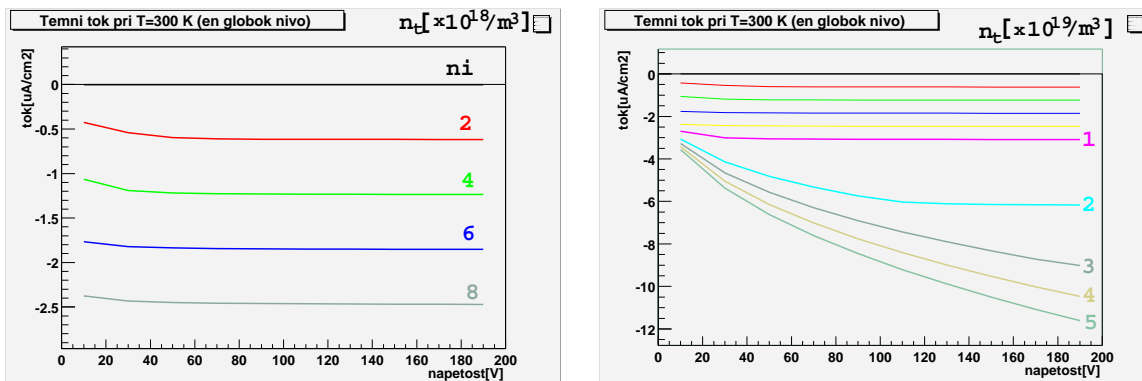


Slika 5.10: Gostota nosilcev naboja v p^+nn^+ diodi pri napetosti 50 V, temperaturi 250 K in gostoti pasti $N_t = 4 \times 10^{19} \text{m}^{-3}$, prva četrtina detektorja.

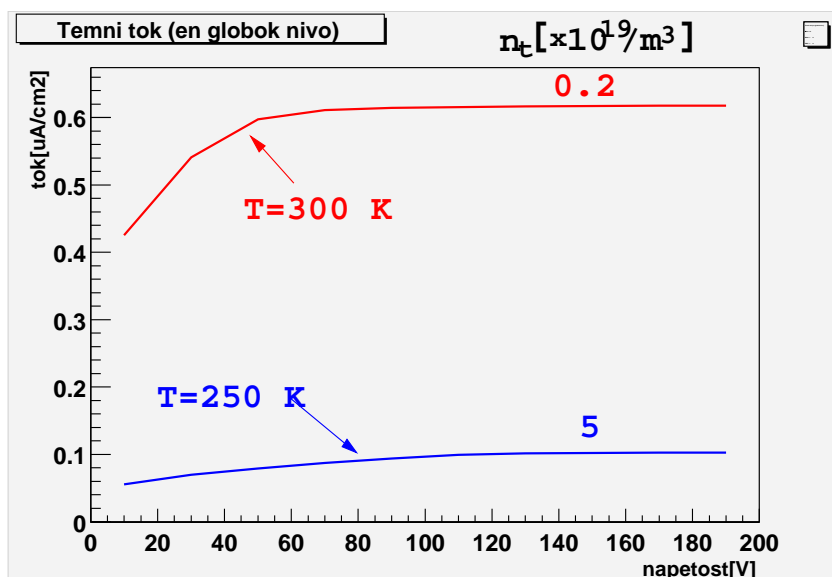
Tok je vsota generacijskega toka I_{GR} sorazmernega globini osiromašenega področja in difuzijskega toka I_D . Za zmerne gostote pasti $N_t > 2 \times 10^{15} \text{m}^{-3}$ (C.19) prevlada

generacijski električni tok v diodi.

Na slikah 5.11 in 5.12 so prikazani simulirani tokovi v p^+nn^+ diodi. Vidimo, da so bolj podobni korenskemu delu (5.5), torej v modelu prevlada generacijski tok nad difuzijskim v obsevanih diodah. S tem je skladna tudi s količino pasti sorazmerna rast nasičenega toka in napetosti v detektorju. Temni tok je pri detektorjih moteč. Prvič zato, ker greje elektroniko. Drugič zato, ker moti signal. Vidimo, da so tokovi mnogo manjši pri nižjih temperaturah - slika 5.12, zato večino detektorjev hladimo.



Slika 5.11: Tok skozi p^+nn^+ diodo pri temperaturi 300 K v odvisnosti od napetosti (horizontalna os, v voltih) in gostote pasti (različne krivulje). Leva slika je izrez desne za majhne gostote pasti, označene na slikah od 0.2 do $5.0 \times 10^{19} m^{-3}$.



Slika 5.12: Tok v p^+nn^+ diodi pri temperaturi 300 K in gostoti pasti $N_t = 0.2 \times 10^{19} m^{-3}$ (rdeče) oziroma temperaturi 250 K in gostoti pasti $N_t = 5 \times 10^{19} m^{-3}$ (modro) v odvisnosti od zaporne napetosti. Opazen je vpliv temperature na temni tok.

Poglavje 6

Zaključek

Sklenimo diplomsko delo s kratko razpravo o rezultatih. Upoštevati moramo, da smo iskali model, ki bi nam opisal dani eksperiment. Zato presojujemo njegovo vrednost predvsem v tej luči.

Izkazalo se je, da so računalniške simulacije kvalitativno dobro posnele realno sliko. Težave pri določanju parametrov enačbe (E_t) kakor tudi parametrov meritev¹ pa otežkočajo kvantitativno primerjavo. Vsekakor smemo slaviti, saj simulirani rezultati dobro pojasnijo različne oblike signalov v obsevanih in neobsevanih diodah. Hkrati daje model smiselno odvisnost temnega toka od napetosti. Opišemo tudi pojav dveh ločenih področij neničelnega polja debelin nekaj desetina globine diode, skupaj z dvema vrhovoma v p^+nn^+ diodi. Tako lahko sklepamo, da je model uspešen. Podrobnejših kvantitativnih primerjav pa naš preprost model z eno samo pastjo ne zdrži.

Naše delo se sicer tu konča, a problem še zdaleč ni rešen. Za določitev pravega električnega polja med merjenjem bi morali uporabiti enačbe za več vrst defektov s karseda različnimi legami energijskih nivojev in gostotami v polprevodniku. Poleg tega bi lahko v račun vzeli tudi interakcijo med defekti. Nadalje bi lahko upoštevali, da majhni vbrizgi nosilcev zmotijo stacionarno stanje v polprevodniku. Zato bi morali dopustiti končne časovne spremembe gostote nosilcev naboja. Torej smo pustili dovolj problemov še odprtih.

Vsekakor pa lahko rečemo, da smo dosegli zastavljeni cilj. Lahko določimo polje v detektorju za različne doze sevanja in različne napetosti. Lahko spremljamo obnašanje detektorja pri nizki temperaturi. To pa je natanko tisto, kar nas je zanimalo in kar zanima konstruktorje ATLASa. Z znanim poljem namreč ni težko simulirati influenciranih tokov in njihovih oblik tudi v močno poškodovanih detektorjih.

¹Navadno so meritve podane v priročnih enotah, saj je važna predvsem relativna oblika krivulje glede na dano občutljivost merilne elektronike.

Dodatek A

Numerične metode

A.1 Streljanje

Iščemo neznane funkcije y_1, \dots, y_N , katerih odvode nam z njihovo vrednostjo in vrednostjo parametra x povezujejo dane relacije:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_N) \\ &\vdots \\ \frac{dy_N}{dx} &= f_N(x, y_1, \dots, y_N) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Množico funkcij $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x))$ in množico relacij $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ sestavimo v vektorja in zapišemo simbolično sistem enčb:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, x) \tag{A.2}$$

Integrator je program, ki s pomočjo danih podatkov pri $x = x_0$ določi vektor \mathbf{y}_{int} v točki $x = x_0 + h$:

$$\mathbf{y}(x_0 + h) = \mathbf{y}_{\text{int}}(\mathbf{y}(x_0), x_0, h) + \mathcal{O}(h^n) \tag{A.3}$$

Napaka, ki jo zagreši integrator, je sorazmerna n -ti potenci koraka h . Število n imenujemo red integratorja, oziroma red metode, ki jo uporablja integrator. Naš integrator je deloval na metodi Runge-Kutta 4. reda [8], torej je bila njegova napaka sorazmerna četrti potenci koraka.

Povsem očitno je, da rabi integrator začetne podatke. Za višje rede mora biti teh začetnih vrednosti ravno toliko, kot je red enačbe. Nadaljevali bomo za enačbe drugega reda, čeprav je metoda splošnejša. Sistem enačb prepisemo v diferencialno enačbo drugega reda za funkcijo $y(x)$ in funkcijo f :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}(x), y(x), x\right) \tag{A.4}$$

Pri naših enačbah nimamo dveh začetnih pogojev, pač pa dva robna pogoja:

$$y(x = 0) = A \quad (\text{A.5})$$

$$y(x = 1) = B \quad (\text{A.6})$$

Težava je torej v manjkajočem začetnem pogoju:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = ?$$

Predstavljamo si, da je vrednost funkcije pri $x = 1$ povezana z izbiro začetnega odvoda. Obstaja torej neka transformacija:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} \rightarrow y(x = 1) \quad (\text{A.7})$$

Seveda si težko predstavljamo kakršnokoli algebrasko zvezo med obema, če ne gra za analitično rešljiv sistem. Vendar pa je problem v osnovi enak. Streljanje ni nič drugega kot iskanje ničle transformacije (A.7) s končnim zaporedjem poskusnih vrednosti začetnega odvoda¹.

Natančnost metode ni več $\mathcal{O}(h^n)$, pač pa je pogojena z natančnostjo začetnega parametra in občutljivostjo enačbe. V kaotičnih enačbah, kamor bi lahko šteli tudi enačbo (2.21), so rešitve močno pogojene z začetnimi pogoji. Take enačbe so nestabilne. Zato so napake rešitev kljub majhnemu koraku in natančnemu začetnemu pogoju lahko tako velike, da je rešitev nesmiselna.

A.2 Relaksacija

Z relaksacijo popravljamo malo nenatančne rezultate. Zato rabimo za njihovo reševanje približno rešitev \mathbf{y} , ki jo bomo popravili s popravkom \mathbf{u} . Tudi to metodo lahko poslošimo na poljubno mnogo neznanih funkcij, nas pa zanima reševanje enačb drugega reda. Takrat se tudi shema precej poenostavi.

Naš približek skoraj reši enačbo:

$$\nabla^2 \mathbf{y} \cong f(\mathbf{y}).$$

V koraku bomo popravili \mathbf{y} z majhnim popravkom \mathbf{u} , tako da bo popravljena funkcija ravno rešila enačbo:

$$\nabla^2 \mathbf{y} + \nabla^2 \mathbf{u} = f(\mathbf{y} + \mathbf{u}),$$

upoštevamo, da je \mathbf{u} majhen popravek, in razvijemo $f(\mathbf{y} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{y}) + \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}$, tako da dobimo enačbo za popravek \mathbf{u} :

$$\nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} = f(\mathbf{y}) - \nabla^2 \mathbf{y}. \quad (\text{A.8})$$

¹Uporabimo lahko katerokoli metodo iskanja ničel (Newton-Ralphson, regula falsi, ...). Topološka zapletenost, ki se lahko skriva za relacijo, podpira sicer počasno a zanesljivo bisekcijo.

Na desni strani se nam je pojavila napaka začetne enačbe. Če je enačbi povsod zadoščeno, so tudi popravki trivialni.

Nato nadomestimo odvode z diferencami in zapišemo zgornjo enačbo za vse notranje točke. Naj bo razmik med točkami na osi x enak $x_k - x_{k-1} = \Delta$. Potem bo:

$$\frac{1}{\Delta^2}(u_{k+1} + u_{k-1}) - \left(\frac{2}{\Delta^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y_k} \right) u_k = f(y_k) - \frac{y_{k+1} + y_{k-1} - y_k}{\Delta^2} \quad (\text{A.9})$$

$$k = 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.10})$$

Za točki na robu, $k = 0$ in $k = N$, pa zapišemo robni pogoj. Tako smo dobili nabor $N+1$ enačb za $N+1$ neznank u_0, \dots, u_N . Sistem lahko zapišemo v obliki:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{r},$$

in opazimo, da je matrika \mathbf{A} tridiagonalna, torej rabimo za reševanje samo $\mathcal{O}(N)$ časa in le pet vektorjev prostora, kar vsekakor govori v prid te metode. Obrnemo jo s programom `tridag` [8].

Na koncu dodamo še varnostni ventil, spremenljivko `s_lowc`. V vsakem koraku ne dodamo cele vrednosti popravka u , pač pa to storimo šele na koncu, ko so popravki dovolj majhni. Mero za bližnjost rešitve nam definira kar velikost popravka, torej:

$$\text{err} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \frac{u_i}{y_0}$$

Popravljamo pa po enačbi:

$$y_k = y_k + \frac{\text{s_lowc}}{\max(\text{s_lowc}, \text{err})} u_k,$$

Tako lahko začetne velike popravke dodajamo le po kapljicah. To se dostikrat izkaže za dobro potezo, saj preprečimo nastanek valov v rešitvi. Relaksacijo bomo uporabili tako v Poissonovi enačbi kot v kontinuitetnih enačbah.

Dodatek B

Ramov teorem

V tem razdelku si bomo ogledali povezavo med električnim poljem v polprevodniku s signalom, izmerjenim na elektrodi. Izpeljava je bila prvič narejena leta 1939 [13], dodali pa ji bomo dodatke, ki omogočajo uporabo v detektorski fiziki [14]. Razdelek bomo začeli s formulacijo problema, nadaljevali z izpeljavo enačbe in si na preprostem modelu ogledali oblike signalov.

B.1 Ramov teorem

Detektor je priključen na zunanje polje preko dveh aluminijastih elektrod. Ti elektrodi skrbita, da je na polprevodniku konstantna napetost, hkrati pa zaznata influenciran naboj. Gibajoč se naboj v električnem polju namreč premakne naboje v kovinski elektrodi, kar zaznamo kot kratkotrajen sunek toka. Radi bi določili obliko tega sunka.

Zato si najprej oglejmo preprost primer. Mislimo si množico elektrod, priključenih na različne napetosti, posebno elektrodo A, na kateri bomo zaznali sunek, ki ga povzroča leteči naboj med temi elektrodami. Vsako elektrodo objamemo s ploskvijo čim bližje njeni površini, tako da je ta ploskev hkrati tudi ekvipotencialna ploskev električnega polja med elektrodami. Tudi gibajoči se naboj e objemimo z majhno sferico, ki je spet ekvipotencialna ploskev. Po celem prostoru, od katerega smo ločili elektrode, velja $\nabla^2\phi = 0$.

Tej situaciji priredimo še eno situacijo, ki naj nam pomaga rešiti problem. Odvzemimo naboj e , potencial na iskani elektrodi pa dvignimo na vrednost ϕ_1 . Spet objemimo vse elektrode, vključno z elektrodo A, s ploskvami, pa tudi na mestu, kjer je bil v prvi verziji problema naboj, ohranimo sferico. Med elektrodami je zdaj potencialno polje ϕ' , za katerega še vedno velja v praznem prostoru enačba $\nabla^2\phi' = 0$.

Za par funkcij u, v velja po Greenovem izreku:

$$\int_{\mathcal{V}} [u\nabla^2v - v\nabla^2u] d\mathcal{V} = \int_{\delta\mathcal{V}} [u\nabla v - v\nabla u] d\mathbf{S} \quad (\text{B.1})$$

S simbolom $\delta\mathcal{V}$ sem označil rob našega volumna \mathcal{V} . Seveda je rob ploskev, zato so na desni strani enačbe ploskovni integrali. Nadomestimo zdaj u in v z našima

potencialoma ϕ in ϕ' :

$$\int_{\mathcal{V}} [\phi \nabla^2 \phi' - \phi' \nabla^2 \phi] d\mathcal{V} = 0 = \int_{\delta\mathcal{V}} [\phi \nabla \phi' - \phi' \nabla \phi] \mathbf{dS} \quad (\text{B.2})$$

Naš rob $\delta\mathcal{V}$ pa je ravno površina vseh ploskvic, ki smo jih zarisali okrog elektrod in gibajočega se naboja.

Pri računanju nam bo pomagala povezava med potencialom in električnim poljem $\Theta = -\nabla\phi$, zveza med gostoto električnega pretoka in jakostjo električnega polja v zraku $\mathbf{D} = \Theta/\epsilon_0$, in še Gaussov stavek $\int \mathbf{D} \mathbf{dS} = e$.

Za vsako elektrodo in objeti naboj torej izračunamo integral $I = \int_S \phi \nabla \phi' \mathbf{dS}$, kjer je S površina ploskvice okrog elektrode. Spomnimo se, da smo zahtevali, da so ploskvice blizu elektrod, torej jih lahko štejemo kot ekvipotencialne ploskve. Potem se iz integrala izpostavi konstantni potencial, v preostanku prepoznamo Gaussov izrek:

$$I = -\phi \int_S \frac{\mathbf{D}'}{\epsilon_0} \mathbf{dS} = -\phi \frac{Q'}{\epsilon_0} \quad (\text{B.3})$$

S tem opazimo v enačbi (B.2) ti. recipročni teorem. Naj indeks i označi različne elektrode. Potem je:

$$\sum_i \phi_i Q'_i + \phi_e e' = \sum_i \phi'_i Q_i + \phi'_e e \quad (\text{B.4})$$

Z ϕ_e smo označili električni potencial na mestu elektrona.

Naj se potencial in naboji na vseh elektrodah, razen na elektrodi A in seveda naboja e , ne spremenijo. Upoštevajmo, da na mestu kroglice ni več naboja, torej $e' = 0$ in nam ostane $\phi_A Q'_A = \phi'_A Q_A + \phi'_e e$. Izberimo še tako ničlo potenciala, da bo $\phi_A = 0$, pa dobimo:

$$\phi'_A Q_A + \phi'_e e = 0 \quad (\text{B.5})$$

Vidimo, da bo naboj na elektrodi A odvisen le od potenciala ϕ'_e , ki ga ustvarja elektroda A, dvignjena na potencial $\phi'_A = \phi_1$. Naboj pa ne bo odvisen od potencialov preostalih elektrod. Zato si olajšamo račun z njihov namišljeno ozemljitvijo:

$$\phi_i = \phi'_i = 0, \quad i \neq A \quad (\text{B.6})$$

Naboj bomo torej izračunali kot:

$$Q_A = -\frac{\phi'_e}{\phi_1} e. \quad (\text{B.7})$$

Kvocien $\frac{\phi'_e}{\phi_1}$ je pravzaprav za nek relati ven potencial v točki naboja. Recimo mu utežni potencial ϕ_w , ki je brez enote in je *potencial v točki naboja, ko naboj odstranimo, elektrodo A pa dvignemo na enotski potencial, medtem ko so vse ostale elektrode ozemljene*.

Nas bolj zanima tok, zato enačbo odvajamo po času:

$$i_A = \frac{dQ_A}{dt} = -e \frac{d\phi_w}{dt} = -e \nabla \phi_w \frac{d\mathbf{r}}{dt} = +e \Theta_w \mathbf{v} \quad (\text{B.8})$$

Vpeljali smo količino Θ_w v enotah inverzne dolžine, ki ji rečemo utežno polje in je *električno polje na mestu naboja, ko naboj odstranimo, elektrodo A dvignemo na enotski potencial, medtem ko so vse ostale elektrode ozemljene*.

Utežno polje je v resnici odvisno le od oblik elektrod. Rešujemo namreč diferencialno enačbo z danimi robnimi pogoji. Oglejmo si preprost primer, par neskončnih plošč. To je dober približek za našo enodimenzionalno diodo. Naj bo ozemljena elektroda B pri koordinati $x = 0$, opazovana elektroda A pa pri $x = d$. Utežno polje bo enodimenzionalno, zato izpustimo vektorsko oznako, in homogeno, z električno poljsko jakostjo:

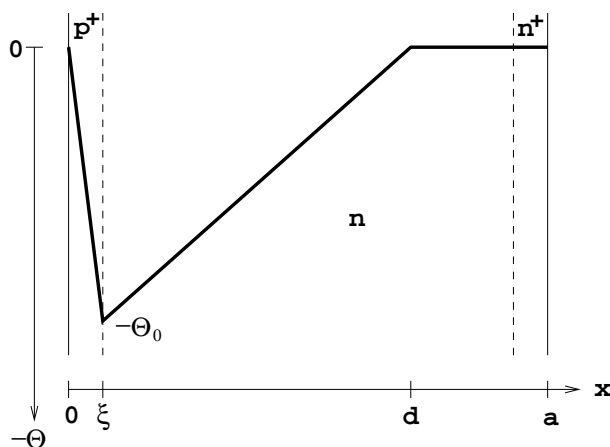
$$\theta_w = -\frac{1}{d} \quad (\text{B.9})$$

Influenciran tok bo torej:

$$i_A(x) = -e \frac{v(x)}{d} \quad (\text{B.10})$$

B.2 Oblika signala

Vse količine so v (B.10) povezane z lego in ne s časom. Obliko signala $i_A(t)$ dejansko dobimo z rešitvijo gibalne enačbe, iz katere določimo $x(t)$. Z njim nadomestimo izraz v zgornji enačbi, da dobimo pravo obliko signala $i_A(t)$.



Slika B.1: Električno polje v p^+nn^+ diodi v okviru približka popolnoma osiromašenih plasti.

V približku popolnoma osiromašenih plasti je v p^+nn^+ diodi linearno negativno električno polje, kot kaže slika B.2. Debelina $\xi = 0.001a$, zato je skok na vrh $-\Theta_0$ praktično na robu diode. Polje je samo v osiromašeni plasti, ki sega do globine d . Skok potenciala pri nn^+ zanemarimo, tako da je:

$$\Theta = \Theta_0 \left(\frac{x}{d} - 1 \right) \quad (\text{B.11})$$

Gibalna enačba je podana v okviru Drude-ove teorije gibanja elektronov kot definicija gibljivosti (2.30):

$$v = \frac{dx}{dt} = -\mu\Theta(x) \quad (\text{B.12})$$

Diferencialno enačbo rešimo za elektrone in zgornjo obliko polja (B.11). Uvedemo časovni parameter $\tau = d/\mu\Theta_0$. Lega se od začetka pri $x(t=0) = x_0$ spreminja kot:

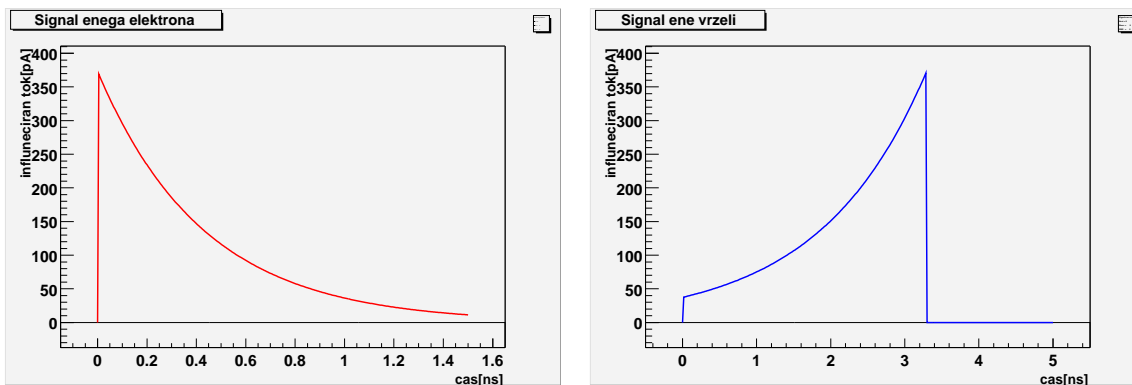
$$\frac{x}{d} = \left(\frac{x_0}{d} - 1\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 \quad (\text{B.13})$$

Območje veljavnosti te enačbe je seveda med $0 < x < d$. Za $x_0 > d$ je polje $\Theta = 0$, torej je $x(t) = x_0$, seveda za x_0 v detektorju. Za $x_0 = d$ je enačba brezpredmetna, elektron ostane na robu. Zato bomo zaznali elektrone z $x_0 = 0$. Vrzeli imajo ravno nasproten predznak eksponenta, zato zaznamo vrzeli, ki se pojavijo tik pred točko $x_0 = d$.

Vstavimo zdaj dobljeno obliko v enačbo za tok, v kateri smo hitrost preoblikovali z (B.12). Predznak eksponenta je odvisen od vrste nosilcev, pozitiven za vrzel in negativen za elektrone¹:

$$i_A(t) = -\frac{e}{\tau} \left(\frac{x_0}{d} - 1\right) e^{\pm\frac{t}{\tau}} \quad (\text{B.14})$$

Na sliki B.2 sta prikazana signala ene vrzeli, rojeni pri $x_0 = (1 - 0.01)d$ (desno) in enega elektrona z $x_0 = 0$ (levo). Tok se za gibajoče elektrone zmanjšuje, ker se oddaljujejo od največjega polja, za vrzeli pa narašča, ker se vrhu bližajo. Signal je daljši pri vrzelih, ker imajo manjšo gibljivost, in ga odrežemo, ko vrzeli dosežejo rob pri $x = 0$. Eksponentni signali so povezani z linearnim poljem.



Slika B.2: Signal enega elektrona ($x_0 = 0$, levo) in ene vrzeli ($x_0 = (1 - 0.01)d$, desno) v linearnem električnem polju v popolno osiromašeni p^+n diodi ($d = a$) z vrhom $\Theta_0 = 466$ kV/m.

¹Gibljivosti elektronov in vrzeli so različne, zato tudi časi τ .

Dodatek C

Temni tok

Temni tok v polprevodniku sledi enačbi (5.5):

$$I = I_D \left(e^{-\frac{e_0 V}{k_B T}} - 1 \right) - I_{GR} \sqrt{\frac{V}{V_0}} \quad (\text{C.1})$$

Izpeljali bomo enačbo (C.1) in primerjali velikosti obeh prispevkov I_D in I_{GR} .

Začnimo s kontinuitetnima enačbama (glej (4.2) in (4.3)). Zapišimo tokova kot v (2.31) in (2.32), tako da dobimo:

$$U - \mu_p \nabla p \Theta - \mu_p p \nabla \Theta + D_p \nabla^2 p = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$U + \mu_n \nabla n \Theta - \mu_n n \nabla \Theta + D_n \nabla^2 n = 0 \quad (\text{C.3})$$

Sestavimo novo enačbo brez člena $\nabla \Theta$ [2]. Zato rabimo konstanti:

$$D = \frac{p + n}{\frac{p}{D_n} + \frac{n}{D_p}} \quad (\text{C.4})$$

$$\mu = \frac{p - n}{\frac{p}{\mu_n} + \frac{n}{\mu_p}} \quad (\text{C.5})$$

ki sta blizu konstantam manjšinskih nosilcev, kar kaže tabela C.1.

Tabela C.1: Konstante iz enačbe (C.4) pri presežku enovrstnih nosilcev naboja.

tip polprevodnika	gostoti nosilcev	D	μ
p	$p \gg n$	D_n	μ_n
n	$n \gg p$	D_p	$-\mu_p$

S konstantama D in μ združimo enačbi (C.2) in (C.3):

$$U + \mu \frac{p \nabla n - n \nabla p}{p - n} \Theta + D \frac{n \nabla^2 p + p \nabla^2 n}{p + n} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Presežek generacije nad rekombinacijo, člen U (3.13), je odvisen od koncentracij nosilcev naboja. Termično ravnovesne vrednosti označimo z indeksom 0. V (3.14)

smo zapisali $U = \gamma(n_i^2 - np)$. Za majhne razlike $pn \sim p_0n_0 = n_i^2$ in presežku ene vrste nosilcev naboja $n_0 \gg p_0$ lahko zapišemo presežek sorazmeren majhnemu odmiku manjšinskih nosilcev od ravnovesne vrednosti $U = -\frac{p-p_{n_0}}{\tau_p}$ s časovno konstanto:

$$\tau_p = \frac{1}{\gamma n_0} \quad (\text{C.7})$$

Času τ_p pravimo rekombinacijski čas, ker nam meri približevanje gostot ravnovesnim pri majhnih presežkih manjšinskih nosilcev.

Majhne odmik od ravnovesnih stanj dobimo na stiku popolnoma osiromašene in termično ravnovesne plasti v približku popolnoma osiromašenih plasti. Zaporna napetost nam spremeni gostote nosilcev na tem stiku, vendar so to majhni odmik od termično ravnovesnih vrednosti daleč od stika v termično ravnovesni plasti. Rešimo enačbo (C.6) v termično ravnovesni plasti ($\Theta = 0$). V limiti $n \gg p$ bo opisala difuzijo manjšinskih nosilcev:

$$U + D_p \nabla^2 p = 0 \quad (\text{C.8})$$

Zato nam da enačba (C.8) preprosto rešitev:

$$p - p_{n_0} = Ae^{-\frac{x}{L_p}} + Be^{\frac{x}{L_p}} \quad (\text{C.9})$$

Konstanti A in B bomo določili z robnimi pogoji. Parameter L_p je povezan z difuzijo in rekombinacijskim časom $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$.

Robne pogoje bomo izpeljali iz izraza za tok vrzeli preko stika:

$$I_p = q(\mu_p p \Theta - D_p \nabla p) \quad (\text{C.10})$$

Tok I_p bo dosega v običajnih stikih $p - n$ nekaj $\mu\text{A}/\text{cm}^2$. Velikostni red členov, katerih razlika je tok, pa je nekajkrat večji, saj dobimo za $p = 10^{18}/\text{m}^3$, $\Theta = 100\text{kV}/\text{m}$ tok $q\mu_p p \Theta \sim 1 \text{ A}/\text{cm}^2$. Torej je dejanski tok majhna razlika dveh ogromnih členov. V prvem približku to razliko zanemarimo in računamo, kot da smo v ravnovesju:

$$\frac{\nabla p}{p} = \nabla \left(\frac{e_0 \Psi}{k_B T} \right) \quad (\text{C.11})$$

Izračunali bomo gostoto vrzeli na obeh straneh stika. Označili bomo p_n kot gostoto na n strani diode, p_p na p strani, indeks $_0$ pa bomo dodajali, kot smo že navajeni, količinam, ki bi jih dosegli v termičnem ravnovesju.

V termičnem ravnovesju bo preko stika le padec notranje napetosti, $\Delta\phi^{(0)}$:

$$p_{p_0} = p_{n_0} e^{\frac{e_0 \Delta\phi^{(0)}}{k_B T}} \quad (\text{C.12})$$

Sicer pa bo napetostni skok porasel še za zunanjo napetost V (šteta kot pozitivna na p strani). Daleč od stika bo gostota enaka ravnovesni gostoti, blizu stika pa bo dosegla vrednost:

$$p_n = p_{n_0} e^{-\frac{e_0 V}{k_B T}} \quad (\text{C.13})$$

Z danimi robnimi pogoji lahko določimo gostoto vrzeli po vsej dolžini ($x = 0$ je rob osiromašenega območja na n strani diode):

$$p(x) = p_{n_0} + p_{n_0} \left(e^{-\frac{e_0 V}{k_B T}} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_p}} \quad (\text{C.14})$$

To zvezo vstavimo v enačbo (C.10) in upoštevamo, da smo v ravnovesnem polprevodniku. Na robu ravnovesnega področja ($x = 0$) je tako tok vrzeli:

$$I_p = \frac{q D_p p_{n_0}}{L_p} \left(e^{-\frac{e_0 V}{k_B T}} - 1 \right) \quad (\text{C.15})$$

Gibalo tega toka je difuzija (C.8), zato mu recimo difuzijski tok.

Račun bi enako zastavili za tok elektronov na p strani, relaksacijski čas je:

$$\tau_n = \frac{1}{\gamma p_0}. \quad (\text{C.16})$$

Skupni difuzijski tok pa je vsota difuzije elektronov in vrzeli:

$$I = I_D \left(e^{-\frac{e_0 V}{k_B T}} - 1 \right) I_D = \frac{q D_n n_{p_0}}{L_n} + \frac{q D_p p_{n_0}}{L_p}. \quad (\text{C.17})$$

Izraz (C.17) smo izpeljali za plasti z znatno gostoto nosilcev. Pri veliki zaporni napetosti pa bomo imeli v detektorju le malo nosilcev, zato bomo bližje drugi skrajnosti z $n, p \rightarrow 0$. V tej plasti bo vsak nastali par prispeval k toku, zato bo ta sorazmeren njihovem številu in volumnu, v katerem pari nastajajo [15]. Približno lahko zapišemo:

$$I = q U d = I_{GR} \sqrt{\frac{V}{V_0}} \quad (\text{C.18})$$

kjer je U (3.13) presežek generacije nad rekombinacijo, V zaporna napetost in V_0 napetost, potrebna za polno osiromašenje neobsevane diode s profilom 1.1 $V_0 \sim 67$ V. I_{GR} je tudi nasičenje pri $V = V_0$ in večje zaporne napetosti toka ne večajo. Določimo ga pri $n, p = 0$ v okviru enačbe (3.13). Že pri majhnih dodatkih pasti N_t je ta tok mnogo večji od I_D preko stika p^+n , v katerem je tok elektronov mnogo večji od toka vrzeli:

$$\frac{I_{GR}}{I_D} = \frac{N_D U a}{n_i^2} \sqrt{\frac{e_0 \tau_n}{\mu_n k_B T}} = \sqrt{\frac{N_t}{2 \times 10^{15} \text{m}^{-3}}} \quad (\text{C.19})$$

in korenska odvisnost od zunanje napetosti prevlada nad eksponentnim členom.

Dodatek D

Uporabljeni simboli in njihov pomen

a	-debelina diode
ξ	-relativna debelina plasti z visoko koncentracijo primesi
n^+, p^+	-plasti z visokimi koncentracijami primesi
ΔN	-gostota ioniziranih primesi v diodi
N_D	-gostota ioniziranih donorskih primesi
N_A	-gostota ioniziranih akceptorskih primesi
n	-gostota prevodnih elektronov
n	-indeks, ki pripisuje lastnost prevodnim elektronom
p	-gostota prevodnih vrzeli
p	-indeks, ki pripisuje lastnost prevodnim vrzelim
E_g	-energijska špranja
m_n^*, m_p^*	-efektivna masa prostih nosilcev naboja
μ_n, μ_p	-gibljivost nosilcev naboja
ε	-dielektričnost
ε_0	-influenčna konstanta ($\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{As/Vm}$)
E	-energija nivoja, stanja
$\rho(E)$	-gostota energijskih stanj
N	-število elektronov v prevodnem pasu
m_e	-masa elektrona ($m_e c^2 = 0.51 \text{MeV}$, c hitrost svetlobe)
E_F	-Fermijeva energija
k_B	-Boltzmannova konstanta ($k_B = 8.6317 \times 10^{-5} \text{eV/K}$)
T	-temperatura
E_C	-spodnji rob prevodnega pasu
E_V	-zgornji rob valenčnega pasu
k	-valovni vektor elektronov
\hbar	-Planckova konstanta ($\hbar = 1.05 \times 10^{-24} \text{Js}$)
\mathcal{V}	-volumen
N_C	-gostota stanj v prevodnem pasu
P_V	-gostota stanj v valenčnem pasu
E_i	-Fermijeva energija čistega polprevodnika
n_i	-gostota lastnih nosilcev naboja

e_0	-osnovni naboj ($e_0 = 1.6 \times 10^{-19} \text{As}$)
ψ	-kvazipotencial
φ	-fermijev potencial $\varphi = \frac{E_F}{e_0}$
ϕ	-električni potencial
Θ	-jakost električnega polja
∇	-nabla, $\nabla = (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$
x	-koordinata vzdolž globine diode
Δ	-razlika vrednosti, $\Delta f = f(1) - f(0)$
ρ_e	-gostota naboja
x_n	-globina osiromašene plasti na n strani $p - n$ stika
x_p	-globina osiromašene plasti na p strani $p - n$ stika
$\Delta\phi^{(0)}$	-skok potenciala v termično ravnovesni $p - n$ diodi
V	-zunanja napetost v zaporni smeri
v_n, v_p	-povprečna hitrost nosilcev naboja zaradi električnih sil
J_n, J_p	-električni tok nosilcev naboja
V_T	-termična napetost ($V_T = \frac{k_B T}{e_0}$)
D_n, D_p	-difuzijska konstanta nosilcev naboja
t	-čas
U_n, U_p	-presežek generiranih nad rekombiniranimi nosilci naboja
G	-gostota generiranih nosilcev naboja na časovno enoto
R	-gostota rekombiniranih nosilcev naboja na časovno enoto
v_n^{th}, v_p^{th}	-povprečna termična hitrost nosilcev
t ali t	-indeks, ki pove tip pasti
w_n^t, w_p^t	-verjetnost zajetja prostega nosilca na pasti tipa t
σ_n^t, σ_p^t	-presek za zajetje prostega nosilca v pasti tipa t
c_n^t, c_p^t	-koeficient za zajetje, verjetnost za zajetje na gostoto nosilcev naboja pasti tipa t
g	-degeneracija energijskih nivojev pasti
$\varepsilon_n^t, \varepsilon_p^t$	-verjetnost za emisijo nosilca naboja iz pasti tipa t
τ^t	-povprečen čas, ki ga preživi nosilec naboja na pasti tipa t
$F(E)$	-vrednost Fermi-Diracove porazdelitve pri energiji E
E_t	-energijski nivo pasti tipa t
N_t	-gostota pasti tipa t
x_t	-parameter pasti, $x_t = e^{\frac{E_t - E_i}{k_B T}}$
P_t	-verjetnost za zasedenost pasti tipa t
Q^{depp}	-gostota statičnega naboja na pasteh
Q_A	-gostota statičnega naboja na akceptorskih pasteh
Q_D	-gostota statičnega naboja na donorskih pasteh
φ_n, φ_p	-kvazifermijev potencial za nosilce naboja, elektrone in vrzeli
K	-parameter nestabilnosti Poissonove enačbe, enak gostoti primesi v plasteh velikih koncentracij primesi n^+, p^+
A, B	-prosti integracijski konstanti

s_l, s_d	-najboljša odvoda kvazipotenciala levo in desno od začetne točke
I_0	-enota za merjenje številskih tokov, glej (4.25)
J_0	-enota za merjenje električnih tokov, glej (4.25)
θ_t	-parameter pasti, kvocient koeficientov za zajetje vrzeli in elektronov $\theta_t = \frac{c_p^t}{c_n^t}$
U_t^0	-enota za presežek generacije nad rekombinacijo, glej (4.27)
β_t	-kvocient enote za presežek generacije nad rekombinacijo z enoto za gradient toka $\beta_t = \frac{U_t^0}{I_0/a}$
b	-kvocient gibljivosti prevodnih elektronov in vrzeli, $b = \frac{\mu_n}{\mu_p}$
I_{GR}	-električni tok zaradi generacije in rekombinacije nosilcev naboja
I^0	-prosta integracijska konstanta, konstantni električni tok skozi polprevodnik
$F(x), FR(x)$	-pomožni funkciji pri določanju električnega toka; enačbi (4.35) in (4.36)
d	-globina osiromašene plasti okrog $p - n$ stika
I_D	-nasičen električni tok zaradi difuzije v pn diodi

Literatura

- [1] <http://pdg.lbl.gov/atlas/...>
- [2] J. L. Moll. *Physics of semiconductors* . New York: McGraw-Hill; 1964.
- [3] S. M. Sze. *Physics of semiconductor devices* . 2nd edition. New York: John Wiley & Sons; 1981.
- [4] C. T. Sah. The spatial variation of the quasi-fermi potentials in p-n junctions. *IEEE Trans on Electron Devices* 1966; vol. ED-13 : 839-46.
- [5] G. Lutz: Effects of deep level defects in semiconductor detectors. *Nucl Instr and Meth in Phys Res* 1996; A 377 : 234-43.
- [6] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin.*Solid state physics* . Philadelphia: Holt-Saunders International Editions; 1981.
- [7] W. Shockley. Theory of p-n junctions in semiconductors and p-n junction transistors.*Bell System Technical Journal* 1949; vol.28 : 435-89.
- [8] W.H.Press,S.A.Teukolsky,W.T.Vetterling,B.P.Flannary.*Numerical recipes in C* . 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 1992.
- [9] J. L. Moll, R. C. Prim, J. A. Morrison. Graded p-n junction;*Bell System Technical Journal* 1960 : 1584-601.
- [10] H. K. Gummel. A self consistent iterative scheme for one-dimensional steady state transistor calculations.*IEEE Trans on Electron Devices* 1964; vol. ED-11 : 455-65.
- [11] Meritve oblik tokov na Institutu Jožef Stefan, Odsek za eksperimentalno fiziko delcev (neobjavljeno).
- [12] E. Fretwurst, V. Eremin, H. Feick, J. Gerhardt, Z. Li, G. Lindström. Investigation of damage induced defects in silicon by TCT.*Nucl Inst & Meth in Phys Res* 1997; A 388 : 356-60.
- [13] S.Ramo. Currents induced by electron motion.*Proceed of the I.R.E.* 1939: 584-5.
- [14] V. Radeka. Low-noise techniques in detectors.*Ann Rev Nucl Part Sci* 1988; 38 : 217-77.

- [15] G. Lutz. *Semiconductor Radiation Detectors* . New York: Springer Verlag; 1999.